Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 08 - Lösungen

Stilianos Louca

13. Januar 2008

Aufgabe 01

a) Die Normierungskonstante ergibt sich jeweils als

$$|a_k| = \sqrt{\frac{2}{2k+1} \cdot \left(\int_{-1}^{1} p_k^2(x)\ dx \right)^{-1}}$$

wobei p_k das k-te noch zu normierende Legendre-Polynom sei. Ferner soll gelten: $P_k(1) = 1$. Somit:

- $$|a_0| = \sqrt{2 \cdot \left(\int_{-1}^{1} dx \right)^{-1}} = 1 \ \rightarrow \ a_0 = 1$$

- $$|a_1| = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left(\int_{-1}^{1} x^2\ dx \right)^{-1}} = 1 \ \rightarrow \ a_1 = 1$$

- $$|a_2| = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \left(\int_{-1}^{1} (1-3x^2)^2\ dx \right)^{-1}} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ a_2 = -\frac{1}{2}$$

b) Ist eine Funktion $f(x)$ darstellbar als

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

so gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_k(x)\ dx = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \int_{-1}^{1} P_l(x) P_k(x)\ dx = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{2}{2k+1} \delta_{lk} = \frac{2c_k}{2k+1}$$

und die Koeffizienten c_l sind somit gegeben durch

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_k(x)\ dx$$

- Die Funktion wird durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x \in [-1, 0] \\ 1-x & : x \in [0, 1] \end{cases}$$

beschrieben. Somit ergeben sich die ersten 3 Koeffizienten als

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_0 \; dx = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_1 x \; dx = -1$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_2(1 - 3x^2) \; dx = 0$$

c) Analog ist diese Dreiecksfunktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & : x \in [-2, 0] \\ 1 - \dfrac{x}{2} & : x \in [0, 2] \end{cases}$$

Somit ergeben sich die Koeffizienten als

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_0 \; dx = 1$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_1 x \; dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_2(1 - 3x^2) \; dx = -\frac{5}{16}$$

d) Für die Funktion

$$f(x) = 1 - x^2, \; x \in [-1, 1]$$

ergeben sich die ersten 3 Entwicklungskoeffizienten als

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot a_0 \; dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \; dx = -\frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{1} (1 - x^2) x \; dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{4} \cdot \int_{-1}^{1} (1 - x^2)(3x^2 - 1) \; dx = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 02

Bemerkung: Die Definition von $G(x, h)$ macht nur Sinn für $|h| < 1$.

a) Wir definieren die Funktion

$$g(x, h) := \frac{h}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^{n+1}$$

Wir rechnen ein Paar Ableitungen aus

$$\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} = \frac{2x - x^2 h + 2xh^2 - 3h}{(1 - 2xh + h^2)^{5/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)h^{n-1}P_n(x)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{h}{(1 - 2xh + h^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{3h^2}{(1 - 2xh + h^2)^{5/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n''(x)h^n$$

und schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-x^2)P_n'' - 2xP_n + n(n+1)P_n\right] \cdot h^n = (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n''(x)h^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)n(n+1)h^n$$

$$= (1-x^2)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial G}{\partial x} + h\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} = \frac{(1-x^2)3h^2 - 2xh(1-2xh+h^2) + h(2x - x^2 h + 2xh^2 - 3h)}{(1-2xh+h^2)^{5/2}} = 0$$

Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt demnach

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n + n(n+1)P_n = 0 \quad \square$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$f(h) := G(1,h) = \frac{1}{(1-h)} \overset{h\leq 1}{=} \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n$$

schreiben diese als Taylorreihe auf

$$f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(h_0) \cdot \frac{(h-h_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1-h_0)^{n+1}} \frac{(h-h_0)^n}{n!}$$

$$h_0 = 0 : f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

und bekommen so

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n \;\rightarrow\; P_n(1) = 1$$

Die oben definierten Funktionen P_n sind also schon normiert bzw. identisch mit den Legendre-Polynomen!

c) Wir betrachten zuerst den Fall $r' < r$, und schreiben

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

Wir nennen

$$x := \cos\vartheta, \; h := \frac{r'}{r} < 1$$

vergleichen mit G und schreiben sofort auf

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2hx + h^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\vartheta\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

Der Fall $r' > r$ ist völlig analog, und wir bekommen

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\vartheta\right) \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

Aufgabe 03

a) Allgemein ist das Potential U einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$ am Ort $\vec{r}$ gegeben durch

$$U(\vec{r}) = K \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\; dV' \;,\; K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Mit dem Ergebniss der vorigen Aufgabe hat man also für $|\vec{r}| > |\vec{r}\,'|$ (also außerhalb der das Volumen V einschließenden Minimal-Kugel)

$$U(\vec{r}) = K \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\left(\vec{r}\angle\vec{r}\,'\right)\right) \left(\frac{r'}{r}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{r^{n+1}} \cdot \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}\,') P_n\left(\cos\left(\vec{r}\angle\vec{r}\,'\right)\right) r'^n}_{=:Q_n(\vec{r})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n K}{r^{n+1}}$$

Speziell für den Kreisring

$$R := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2,\; z = 0\right\}$$

mit der Linienladungsdichte

$$\lambda := \frac{Q}{2\pi a}$$

bekommt man

$$Q_n(\vec{r}) = \int_R \lambda P_n\left(\cos\left(\vec{r}\angle\vec{r}\,'\right)\right) a^n\; ds' = a^{n+1}\lambda \int_0^{2\pi} P_n\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{rr'}\right)\; d\varphi'$$

$$= a^{n+1}\lambda \int_0^{2\pi} P_n\left[\frac{(x\cos\varphi' + y\sin\varphi')}{r}\right]\; d\varphi' = a^{n+1}\lambda \int_0^{2\pi} P_n\left[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\right]\; d\varphi'$$

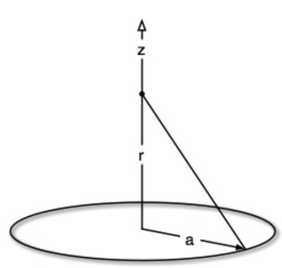
und schließlich

$$U(\vec{r}) = \lambda K \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} P_n\left[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\right]\; d\varphi' \right\}$$

b) Wir beginnen mit

$$U(\vec{r}) = K \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\; dV'$$

und schreiben für den Kreisring



$$U(r, \vartheta = 0) = \lambda K \cdot \int_R \frac{ds'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \lambda K \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a\; d\varphi'}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{\overbrace{2\pi a\lambda}^{Q} K}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{QK}{\sqrt{r^2 + a^2}} \qquad \square$$

c) Wir entwickeln zuerst mit Hilfe des Ergebnisses in Aufgabe (02)

$$U(r,\vartheta=0)=\frac{QK}{r\sqrt{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2}}\overset{*}{=}\frac{QK}{r}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)\left(\frac{a}{r}\right)^n\overset{**}{=}\frac{QK}{r}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

Bemerkungen:

- (*) : Setzen $x=0$ und $h=\frac{a}{r}<1$ und verwenden

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

- (**) : Verwenden entweder die Identität

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

um zu zeigen dass

$$P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2^n n!}=(-1)^n\frac{2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot(2n)\cdot 2^n n!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$P_{2n+1}(0)=0$$

ist, oder entwickeln einfach die Funktion

$$f\left(\frac{a^2}{r^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}}$$

in eine Taylorreihe an der Stelle 0 um zum gleichen Ergebnis zu gelangen!

Wir nutzen nun den Satz aus Aufgabe (01) um für konstantes r bzgl. ϑ zu entwickeln.

$$U(r,\vartheta)\cong u(\cos\vartheta,r)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\vartheta)\cdot c_n(r)$$

wobei $c_n(r)$ noch zu bestimmende Funktionen von r sind. Wir untersuchen dazu den Fall $\vartheta=0$:

$$U(r,\vartheta=0)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{P_n(\cos 0)}_{P_n(1)=1}\cdot c_n(r)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(r)$$

vergleichen mit dem Ergebnis aus Teil (b):

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)c_n(r)=\frac{QK}{r}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)\left(\frac{a}{r}\right)^n\quad\forall\ r$$

und bekommen

$$c_n(r)=\frac{P_n(0)}{P_n(1)}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^n\ \to\ c_{2n}=(-1)^n\frac{QK}{r}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n},\ c_{2n+1}(r)=0$$

Somit ergibt sich

$$U(r,\vartheta)=\frac{QK}{r}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\cdot P_{2n}(\cos\vartheta)\quad\square$$

d) Es gilt auch für $a>r$

$$U(r,\vartheta=0)=\frac{QK}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

Analog wie vorhin können wir schreiben

$$U(r, \vartheta = 0) = \frac{QK}{a\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} = \frac{QK}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n}$$

vergleichen mit

$$U(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta) \cdot c_n(r) \;\rightarrow\; U(r, \vartheta = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \cdot c_n(r)$$

bekommen

$$c_{2n}(r) = (-1)^n \frac{QK}{a} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n}, \; c_{2n+1}(r) = 0$$

und schließlich

$$U(r, \vartheta) = \frac{QK}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \cdot P_{2n}(\cos\vartheta)$$