Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

13. Januar 2008

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 08: LEGENDRE-Polynome.

Aufgabe 01: Die Orthogonalität der Legendre-polynome

a) Die LEGENDRE-Polynome erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)\ dx = \frac{2}{2k+1}\delta_{kl}$$

Bestimmen Sie aus dieser Bedingung die Normierungskonstanten der ersten drei Legendre-Polynome

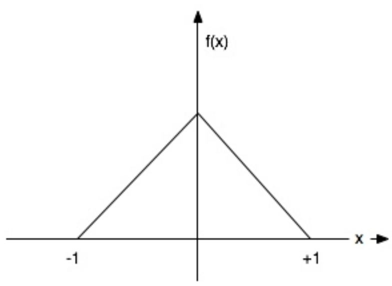
- $P_0(x) = a_0$
- $P_1(x) = a_1 x$
- $P_2(x) = a_2(1 - 3x^2)$

b) Funktionen können in eine Reihe nach LEGENDRE-Polynomen gemäß

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

entwickelt werden.

- Berechnen Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation die ersten 3 Koeffizienten dieser Entwicklung für die in der Abbildung gegebene und im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ definierte Dreiecksfunktion.



- Lösen sie die Teilaufgabe (b) nun für eine ähnliche Dreiecksfunktion, deren Definitionsbereich sich von $x = -2$ bis $x = 2$ erstreckt.
- Berechnen Sie die ersten 3 Entwicklungskoeffizienten für die Funktion $f(x) = 1 - x^2$ und $-1 \leq x \leq 1$.

Aufgabe 02: Die Erzeugende der Kugelfunktion

Funktionen $P_n(x)$ seien durch

$$G(x,h) = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$$

definiert. Darin ist h eine Hilfsvariable. Die Funktion $G(x,h)$ heißt erzeugende der Kugelfunktionen.

a) Weisen Sie nach, dass die so definierten Funktionen $P_n(x)$ die LEGENDRE-sche Differentialgleichung

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

erfüllen, worin der Strich die Ableitung nach der Variablen x bedeutet.

b) Normieren Sie die Funktionen $P_n(x)$ so, dass sie mit den LEGENDRE-Polynomen identisch werden.

c) Wenn zwei durch die Ortsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ gegebene Punkte die Abstände r bzw. r' vom Koordinatenursprung haben und die beiden Vektoren den Winkel ϑ einschließen, ist

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta}}$$

Geben Sie die Entwicklung dieses reziproken Abstandes nach Kugelfunktionen sowohl für $r' < r$ als auch für $r' > r$ an.

Aufgabe 03: Die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials

Ein in der (x,y)-Ebene mit seinem Zentrum im Koordinatenursprung liegender Kreisring mit dem Radius a trage die elektrische Gesamtladung Q. Die Ladungsverteilung sei axialsymmetrisch.

a) Schreiben Sie für $r > a$ die allgemeine Entwicklung des elektrostatischen Potentials U nach Kugelfunktionen auf.

b) Zeigen Sie durch direkte Integration, dass

$$U(r,\vartheta=0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,\bigg|_{\vartheta=0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

ist.

c) Entwickeln Sie diese Resultat nach Potenzen von $\frac{a}{r}$ und bestimmen Sie durch Vergleich mit der Entwicklung aus Aufgabenteil (a) die Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen. Zeigen Sie auf dieser Weise, dass

$$U(r,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\cos\vartheta)$$

gilt.

d) Gewinnen Sie einen ähnlichen Ausdruck für $r < a$.