Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 07 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Januar 2008

Aufgabe 01

a) Wir machen den Ansatz $U(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y(\vartheta,\varphi)$ und schreiben

$$0 = \Delta U + k^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2 U$$

$$= \frac{Y}{r^2}\left(2rR' + r^2R''\right) + \frac{R}{r^2\sin\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2}\right) + \frac{R}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + k^2RY$$

$$\rightarrow \underbrace{\left[\frac{r}{R}\left(2R' + rR''\right) + k^2r^2\right]}_{\alpha} + \underbrace{\frac{1}{Y\sin\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2}\right) + \frac{1}{Y\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}_{-\alpha} = 0$$

b) Für den Radialteil gilt somit die DGL

$$r^2R'' + 2rR' + R\left(k^2r^2 - \alpha\right) = 0$$

Wir substituieren

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot f(kr) \;\rightarrow\; R' = -\frac{r^{-\frac{3}{2}}}{2}f(kr) + \frac{k}{\sqrt{r}}f'(kr),\quad R'' = \frac{k^2}{\sqrt{r}}f''(kr) - kr^{-\frac{3}{2}}f'(kr) + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}f(kr)$$

gehen damit in die DGL ein

$$0 = k^2r^{\frac{3}{2}}f'' + kr^{\frac{1}{2}}f' + \frac{f}{\sqrt{r}}\left(k^2r^2 - \alpha - \frac{1}{4}\right)$$

und erhalten die Besselsche DGL

$$0 = (kr)^2\cdot f'' + (kr)\cdot f' + f\left((kr)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{4}\right)\right)$$

deren Lösung gegeben ist durch

$$f(kr) = AJ_\mu(kr) + B\mathcal{N}_\mu(kr),\quad \mu := \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$$

wobei J_μ und $\mathcal{N}_\mu$ jeweils die Besselfunktion und Neumannfunktion μ-ter Ordnung sind.
Somit ergibt sich die α-spezifische Lösung für $R(r)$ als

$$R_\alpha(r) = \frac{A}{\sqrt{r}}J_\mu(kr) + \frac{B}{\sqrt{r}}\mathcal{N}_\mu(kr),\quad \mu := \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$$

Da $\alpha = l(l+1),\ l\in\mathbb{N}_0$ sein darf, ergibt sich die allgemeine Lösung für R als

$$\boxed{R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sum_{l\in\mathbb{N}_0} A_lJ_{\mu_l}(kr) + B_l\mathcal{N}_{\mu_l}(kr),\quad \mu_l := \sqrt{l(l+1) + \frac{1}{4}}}$$

Aufgabe 02

a) Der Laplace Operator Δ ist in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) gegeben durch

$$\Delta = \underbrace{\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}}_{\Delta_r} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}}_{\Delta_\vartheta} + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}_{\Delta_\varphi}$$

Somit ergibt sich für die beiden Funktionen:

$$\Delta U_1 = \underbrace{3\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\cdot\left[A + \frac{B}{r^5}\right]}_{\Delta_r U_1} + \underbrace{3\left(Ar^2 + \frac{B}{r^3}\right)\cdot\left[\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} - 2\frac{\cos^2\vartheta}{r^2}\right]}_{\Delta_\vartheta U} + \underbrace{0}_{\Delta_\varphi U}$$

$$= 3\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\cdot\left(A + \frac{B}{r^5}\right) + 3\left(A + \frac{B}{r^5}\right)\cdot\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right) = 0$$

und

$$\Delta U_2 = \underbrace{2\left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^4}\right)\cdot\sin\vartheta e^{i\varphi}}_{\Delta_r U_2} + \underbrace{\left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cdot\frac{\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)}{r^2\sin\vartheta}\cdot e^{i\varphi}}_{\Delta_\vartheta U_2} \underbrace{- \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\cdot e^{i\varphi}}_{\Delta_\varphi U_2}$$

$$= \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^4}\right)\cdot\frac{\left(2\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta - 1\right)}{\sin\vartheta}\cdot e^{i\varphi} = 0$$

b) Siehe oben.

c) Wir schreiben die allgemeine Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten auf

$$\Delta U = \Delta U + k^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

machen den Ansatz $U(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ und bekommen mit ein Paar Umformungen

$$\frac{2rR'}{R} + \frac{r^2R''}{R} = -\frac{\Theta'}{\Theta\tan\vartheta} - \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\Phi''}{\Phi\sin^2\vartheta} =: l$$

Wir lösen die (Eulersche homogene) DGL für die radiale Komponente R

$$r^2R'' + 2rR' - lR = 0$$

mit dem Ansatz

$$R(r) = T(\ln r)$$

und bekommen die allgemeine Lösung

$$R(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2},\ \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4l}}{2}$$

Vergleich mit U_1 bzw. U_2 liefert $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$ bzw. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$. Wegen $l = -\lambda_1\lambda_2$ folgt für die beiden Funktionen $l_1 = 6$ bzw. $l_2 = 2$.
Analog ergibt sich für Θ und Φ

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{\sin^2\vartheta}{\Theta}\left(\frac{\Theta'}{\tan\vartheta} + \Theta'' + l\right) =: -m^2$$

Die allgemeine Lösung der DGL

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

ergibt sich als

$$m \neq 0 : \Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi},\quad m = 0 : \Phi(\varphi) = A + B\varphi$$

Vergleich mit U_1 bzw. U_2 d.h. $\Phi_1(\varphi) = 1$ und $\Phi_2(\varphi) = e^{i\varphi}$ liefert $m_1 = 0$ und $m_2 = \pm 1$.