Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

21. Dezember 2007

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 07: Der LAPLACE Operator in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 01: Die zeitfreie Wellengleichung

a) Separieren Sie mit dem Ansatz $U(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$ die zeitfreie Wellengleichung

$$\Delta U + k^2 U = 0$$

in Kugelkoordinaten.

b) Leiten Sie die Differentialgleichung für den Radialteil her, führen Sie diese auf die BESSELsche Differentialgleichung zurück und geben Sie die Lösung $R(r)$ an.

Hinweis: Setzen Sie als bekannt voraus, dass die Untersuchung der Kugelflächenfunktionen $Y(\vartheta, \varphi)$ die Separationskonstante α auf $\alpha = l(l+1)$ mit $l = 0, 1, 2...$ festlegt.

Aufgabe 02: Die LAPLACE-Gleichung

a) Schreiben Sie in Kugelkoordinaten den LAPLACE-Operator in der Gestalt

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_\vartheta + \Delta_\varphi$$

auf und berechnen Sie $\Delta_r U$, $\Delta_\vartheta U$ und $\Delta_\varphi U$ für die beiden Funktionen

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \left(Ar^2 + \frac{B}{r^3} \right) \cdot \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}$$

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cdot \sin\vartheta \; e^{i\varphi}$$

b) Zeigen Sie, dass beide Funktionen die LAPLACE-Gleichung $\Delta U = 0$ erfüllen, obwohl die Teilresultate $\Delta_r U$ usw. für sich genommen nicht notwendig verschwinden.

c) Bestimmen Sie die zu beiden Funktionen gehörigen Werte l und m.