Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 06 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Januar 2008

Aufgabe 01

a) Zu lösen ist die partielle Differentialgleichung

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Wir machen den Ansatz

$$U(r,\varphi,t) = U_t(t)\cdot U_\varphi(\varphi)\cdot U_r(r)$$

und gehen damit in die DGL ein:

$$0 = \Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = U_t(t)\cdot\Delta\left(U_\varphi U_r\right) - \frac{U_r U_\varphi}{c^2}U_t'' \;\rightarrow\; \frac{\Delta\left(U_r U_\varphi\right)}{U_r U_\varphi} = \frac{U_t''}{c^2 U_t} =: -k^2,\ k\geq 0$$

$$\rightarrow\; U_t(t) = A_t e^{ikct} + B_t e^{-ikct}$$

$$\Delta U_r U_\varphi = \frac{U_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + \frac{U_r}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U_{\varphi^2}}{\partial\varphi^2} = \frac{U_\varphi}{r}U_r' + U_\varphi U_r'' + \frac{U_r}{r^2}U_\varphi'' = -k^2 U_r U_\varphi$$

$$\rightarrow\; \frac{U_r''}{U_r}r^2 + \frac{U_r'}{U_r}r + k^2 r^2 = -\frac{U_\varphi''}{U_\varphi} =: \mu^2,\ \mu\geq 0 \;\rightarrow\; U_\varphi = A_\varphi e^{i\mu\varphi} + B_\varphi e^{-i\mu\varphi}$$

$$U_r'' r^2 + U_r' r + U_r\left(k^2 r^2 - \mu^2\right) = 0$$

Durch die Randbedingung

$$U(r,0,t) = U_r(r)U_\varphi(0)U_t(t) \overset{!}{=} 0\ \forall\ r,t \;\rightarrow\; U_\varphi(0) = 0\ ,\quad U(r,\alpha,t)\overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; U_\varphi(\alpha) = 0$$

bekommt man

$$(A_\varphi, B_\varphi)\neq(0,0)\ \wedge\ A_\varphi + B_\varphi = 0\ \wedge\ A_\varphi e^{i\mu\alpha} + B_\varphi e^{-i\mu\alpha} \;\rightarrow\; e^{i\mu\alpha} = e^{-i\mu\alpha}$$

Wäre $\Re(\mu) = 0$ so wäre $\mu = 0$. Doch das ergebe die lineare Lösung

$$U_\varphi(\varphi) = A_\varphi + B_\varphi\cdot\varphi$$

die wiederum die RB nur im Fall $A_\varphi = B_\varphi = 0$ erfüllen würde. Also ist $\Re(\mu)\neq 0$ und $\Im(\mu) = 0$ da $\mu^2\in\mathbb{R}$ ist. Demnach muss gelten

$$\sin(\mu\alpha) = 0 \;\rightarrow\; \mu = \frac{n\pi}{\alpha} =: \mu_n\ ,\ n\in\mathbb{N} \;\rightarrow\; U_\varphi = 2iA_\varphi\cdot\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\right)\cong\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\right)$$

Für $U_r(r)$ machen wir die Substritution $U_r(r) = R(x),\ x := kr$ und bekommen die Besselsche DGL

$$x^2 R'' + xR' + R\left(x^2 - \mu^2\right) = 0$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$R(x) = AJ_\mu(x) + B\mathcal{N}_\mu(x)$$

wobei $\mathcal{N}_\mu$ die Neumann-Funktion μ-ter Ordnung ist:

$$\mu \notin \mathbb{Z} : \mathcal{N}_\mu(x) = \frac{J_\mu(x)\cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(x)}{\sin(\mu\pi)}$$

$$m \in \mathbb{Z} : \mathcal{N}_m(x) = \lim_{\mu\to m} \mathcal{N}_\mu(x)$$

Also:

$$U_r(r) = R(kr) = A_r J_\mu(kr) + B_r\mathcal{N}_\mu(kr)$$

Wir fordern dass $U_r(0) \overset{!}{\in} \mathbb{R}$ weshalb $B_r = 0$ sein muss, da $\mathcal{N}_\mu$ am Nullpunkt singulär ist. Durch die Randbedingung $U(r = R, \varphi, t) \overset{!}{=} 0 \; \forall \; t, \varphi$ folgt

$$U_r(R) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; J_\mu(kR) = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{\lambda_\mu^m}{R}$$

wobei λ_μ^m die m-te Nullstelle der Besselfunktion J_μ sei. Da wir schon gesehen haben dass μ nur diskrete Werte annehmen darf, schreiben wir

$$k_n^m := \frac{\lambda_{\mu_n}^m}{R}$$

Somit ist auch

$$U_t(t) = A_t e^{ik_n^m ct} + B_t e^{-ik_n^m ct} \cong W_t \cos(k_n^m ct) + P_t \sin(k_n^m ct) \;\;,\quad n, m \in \mathbb{N}$$

die allgemeine Lösung für U_t. Zusammengefasst ergibt sich also:

$$\boxed{U(r,\varphi,t) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} J_{\mu_n}\left(k_n^m r\right)\cdot\left[W_{nm}\cos\left(k_n^m ct\right) + P_{nm}\sin\left(k_n^m ct\right)\right]\cdot\sin\left(\mu_n\varphi\right),\; \mu_n = \frac{n\pi}{\alpha},\; k_n^m = \frac{\lambda_{\mu_n}^m}{R}}$$

Bemerke: $\lambda_{\mu_n}^m \geq 0$ seien in wachsender Reihenfolge zu m aufzufassen.

b) Die Eigenfrequenzen sind genau die Werte

$$\omega_n^m := k_n^m c = \frac{c}{R}\cdot\lambda_{n\pi/\alpha}^m$$

Zu einer bestimmten Eigenfrequenz gibt es zwei verschiedene Schwingungsformen:

$${}^1U_n^m(r,\varphi,t) = W_{nm}J_{\mu_n}(k_n^m r)\cdot\cos\left(\omega_n^m t\right)\cdot\sin(\mu_n\varphi)$$

$${}^2U_n^m(r,\varphi,t) = P_{nm}J_{\mu_n}(k_n^m r)\cdot\sin\left(\omega_n^m t\right)\cdot\sin(\mu_n\varphi)$$

c) Betrachten jetzt eine bestimmte Fundamentalschwingung n, m, Die Knotenlinien sind genau die Punktmengen bei denen $U(r,\varphi,t) = 0 \;\forall\; t$ ist. Dabei unterscheidet man zwischen kreisförmigen Knotenlinien (*Knotenkreise*) und radialen Knotenlinien (Knotenradien).
Für die Knotenkreise fordern wir:

$$U_r\left(r^l\right) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; J_{\mu_n}\left(k_n^m r^l\right) = 0 \;\rightarrow\; r_{nm}^l = \frac{\lambda_{\mu_n}^l}{k_n^m} = R\cdot\frac{\lambda_{\mu_n}^l}{\lambda_{\mu_n}^m}\;,\; l\in\mathbb{N}$$

Der l-te Knotenkreis K_{nm}^l der n,m-ten Fundamentalschwingung ist also gegeben durch

$$K_{nm}^l = \left\{\vec{r}(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : r = R\cdot\frac{\lambda_{\mu_n}^l}{\lambda_{\mu_n}^m},\; \varphi\in[0,\alpha]\right\}$$

wobei offensichtlich $r_{nm}^l \leq R$ also $l \leq m$ sein muss.
Analog fordern wir für die Knotenradien

$$U_\varphi\left(\varphi^l\right) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; \frac{n\pi\varphi^l}{\alpha} = l\pi \;\rightarrow\; \varphi^l = \frac{l}{n}\cdot\alpha,\; l\in\mathbb{N}$$

und erhalten also den l Knotenradius

$$R_{nm}^{l} = \left\{ \vec{r}(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \frac{l}{n} \cdot \alpha,\ r \in [0,R] \right\}$$

wobei $l \leq n$ sein muss!
Für eine Kreisförmige Membran ist $\alpha = \pi$ und somit $\mu_n = n$. Es ergeben sich also die Knotenkreise

$$K_{nm}^{l} = \left\{ \vec{r}(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r = R \cdot \frac{\lambda_n^l}{\lambda_n^m} \right\},\ l \leq m$$

und Knotenradien

$$R_{nm}^{l} = \left\{ \vec{r}(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \frac{l}{n} \cdot \pi,\ r \in [0,R] \right\},\ l \leq n$$

wobei speziell die vier niedrigsten Eigenfrequenzen den 2-Tubeln

$$(n,m) \in \{(0,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)\}$$

entsprechen.

d) Im Falle eines Vollkreises ist $\alpha = 2\pi$ wobei jedoch zu beachten ist dass die Randbedingung $U(r,0,t) = U(r,\alpha,t)$ nicht mehr zu verwenden ist! Es ist nachvollziehbar dass sich für U_r und U_t analoge Lösungen wie vorhin ergeben, wobei μ_n noch irgendwie festgelegt werden muss. Wir beginnen also erneut mit der allgemeinen Lösung

$$U_\varphi(\varphi) = A_\varphi e^{i\mu\varphi} + B_\varphi e^{-i\mu\varphi}$$

Wir fordern aus physikalischer Hinsicht

$$U(r,\varphi,t) \stackrel{!}{=} U(r,\varphi+2\pi,t) \ \rightarrow\ U_\varphi(\varphi) = U_\varphi(\varphi+2\pi)$$

und erhalten

$$A_\varphi \left(1 - e^{i2\pi\mu}\right) \cdot e^{i\varphi\mu} + B_\varphi \left(1 - e^{-i2\pi\mu}\right) \cdot e^{-i\mu\varphi} = 0 \ \ \forall\ \varphi \ \rightarrow\ e^{i2\pi\mu} = e^{-i2\pi\mu} = 1$$

Da wir uns nicht für $\mu = 0$ interessieren, muss

$$\cos(2\pi\mu) + i\sin(2\pi\mu) = \cos(2\pi\mu) - i\sin(2\pi\mu) = 1 \ \rightarrow\ \mu = m \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ U_\varphi(\varphi) = A_\varphi \cos(n\varphi) + B_\varphi \sin(n\varphi)$$

und wir bekommen die allgemeine Lösung

$$\boxed{U(r,\varphi,t) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} J_n\left(k_n^m r\right) \cdot \left[W_{nm}\cos\left(k_n^m ct\right) + P_{nm}\sin\left(k_n^m ct\right)\right] \cdot \left[A_{nm}\cos(n\varphi) + B_{nm}\sin(n\varphi)\right],\ k_n^m = \frac{\lambda_n^m}{R}}$$

Analog zu vorhin sind die Knotenkreise der (n,m)-ten Fundamentalschwingung gegeben durch

$$r_{nm}^{l} = R \cdot \frac{\lambda_n^l}{\lambda_n^m}$$

Für den Fall $A_{nm} = 0$ liegen die Knotenradien bei

$$\varphi_{nm}^{l} = \frac{l}{n} \cdot \pi\ ,\ l \leq 2n$$

Ist $B_{nm} = 0$ liegen sie entsprechend bei

$$\varphi_{nm}^{l} = \left(l + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{n}\ ,\ l \leq 2n - \frac{1}{2}$$

Aufgabe 02

a) Die das System beschreibende partielle Differentialgleichung

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

ist identisch mit der der vorigen Aufgabe. Wir machen also analog zu vorhin den Ansatz

$$U(r,\varphi,t) = U_r(r)\cdot U_\varphi(\varphi)\cdot U_t(t)$$

und bekommen die allgemeinen Lösungen

$$U_t(t) = A_t e^{ikct} + B_t e^{-ikct}$$

$$U_\varphi = A_\varphi e^{i\mu\varphi} + B_\varphi e^{-i\mu\varphi}$$

$$U_r(r) = A_r J_\mu(kr) + B_r \mathcal{N}_\mu(kr)$$

mit den noch aus den Randbedingungen zu bestimmenden k und μ.
Aus physikalischer Hinsicht fordern wir

$$U(r,\varphi,t) \overset{!}{=} U(r,\varphi+2\pi,t)\ \forall\ \varphi \ \rightarrow\ U_\varphi(\varphi) = U_\varphi(\varphi+2\pi)$$

und bekommen

$$A_\varphi\left(1-e^{i2\pi\mu}\right)\cdot e^{i\varphi\mu} + B_\varphi\left(1-e^{-i2\pi\mu}\right)\cdot e^{-i\mu\varphi} = 0\ \ \forall\ \varphi\ \rightarrow\ e^{i2\pi\mu} = e^{-i2\pi\mu} = 1$$

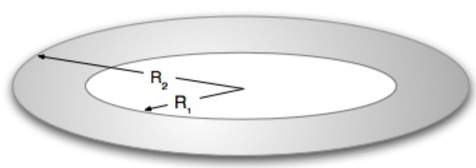
Da wir uns nicht für $\mu = 0$ interessieren, muss

$$\cos(2\pi\mu) + i\sin(2\pi\mu) = \cos(2\pi\mu) - i\sin(2\pi\mu) = 1\ \rightarrow\ \mu = m \in \mathbb{N}\ \rightarrow\ U_\varphi(\varphi) = A_\varphi\cos(n\varphi) + B_\varphi\sin(n\varphi)$$

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich die Randbedingung

$$U(R_1,\varphi,t) = U(R_2,\varphi,t) \overset{!}{=} 0\ \forall\ \varphi,t\ \rightarrow\ U_r(R_1) = U_r(R_2) = 0$$

$$\rightarrow\ A_r J_n(kR_1) + B_r\mathcal{N}_n(kR_1) = A_r J_n(kR_2) + B_r\mathcal{N}_n(kR_2) = 0$$



Umgestellt also

$$\mathcal{G}_n(kR_1) = \mathcal{G}_n(kR_2) = -\frac{B_r}{A_r}\quad,\quad \mathcal{G}_n(x) := \frac{J_n(x)}{\mathcal{N}_n(x)}$$

Wir nennen k_n^m die m-te Lösung der Gleichung $\mathcal{G}_n(kR_1) = \mathcal{G}_n(kR_2)$ und bekommen so die Einschränkung

$$B_r = -A_r\underbrace{\mathcal{G}_n\left(k_n^m R_1\right)}_{g_n^m}$$

Somit ergibt sich die Lösung als

$$\boxed{U(r,\varphi,t) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}}\left[J_n\left(k_n^m r\right) - g_n^m\mathcal{N}_n\left(k_n^m r\right)\right]\cdot\left[A_{nm}e^{ik_n^m ct} + B_{nm}e^{-ik_n^m ct}\right]\cdot\left[C_{nm}\cos(n\varphi) + D_{nm}\sin(n\varphi)\right]}$$

b) Für große Radien ($kr >> n$) gilt näherungsweise

$$J_n\left(k_n^m r\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_n^m r}} \cdot \cos\left[k_n^m r - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathcal{N}_n\left(k_n^m r\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_n^m r}} \cdot \sin\left[k_n^m r - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

So können wir für $\mathcal{G}_n$ näherungsweise schreiben

$$\mathcal{G}_n(kr) \approx \cot\left[kr - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

Somit können wir die k_n^m analytisch berechnen:

$$\cot\left[kR_1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \stackrel{!}{=} \cot\left[kR_2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \;\rightarrow\; kR_1 + m\pi = kR_2 \;\rightarrow\; k = \frac{m\pi}{R_2 - R_1} =: k_n^m$$

und wir erhalten für die l-te radiale Knotenlinie die Beziehung

$$J_n\left(k_n^m r^l\right) - \mathcal{G}_n\left(k_n^m R_1\right)\mathcal{N}_n\left(k_n^m r^l\right) \stackrel{!}{=} 0 \;\rightarrow\; \cot\left[k_n^m r^l - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \approx \frac{J_n\left(k_n^m r^l\right)}{\mathcal{N}_n\left(k_n^m r^l\right)} \stackrel{!}{=} \mathcal{G}_n\left(k_n^m R_1\right) \approx \cot\left[k_n^m R_1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\rightarrow\; k_n^m r^l \approx k_n^m R_1 + l\pi \;\rightarrow\; r^l \approx R_1 + \frac{\pi}{k_n^m} \cdot l \approx R_1 + \frac{l}{m} \cdot (R_2 - R_1),\; 1 \leq l \leq m$$