Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

7. Dezember 2007

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 06: Schwingungen kreisförmiger Membranen

Aufgabe 01: Die Kreissektor-Membran

Untersuchen Sie die transversalen Eigenschwingungen einer kreissektorförmigen Membran mit dem Öfnungswinkel α und dem Radius R, deren Ränder fest eingespannt sind.

a) Lösen Sie die zweidimensionale Wellengleichung in ebenen Polarkoordinaten für die entsprechenden Randbedingungen.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und überlegen Sie sich die Lage der Knotenlinien. Wieviele Schwingungsformen gibt es zu einer Eigenfrequenz?

c) Bestimmen Sie die Knotenlinien für die vier niedrigsten Eigenfrequenzen einer halb-kreisförmigen Membran.

d) Reproduzieren Sie die Ergebnisse für eine Membran in Gestalt eines Vollkreises.

Aufgabe 02

Untersuchen Sie die transversalen Eigenschwingungen einer Membran in Gestalt eines Kreisringes mit den Radies R_1 (innen) und R_2 (außen), deren Ränder fest eingespannt sind.

a) Lösen Sie die zweidimensionale Wellengleichung in ebenen Polarkoordinaten für die entsprechenden Randbedingungen.

b) Berechnen Sie die radialen Knotenlinien für große Radien R_1 und R_2 unter Verwendung der Näherungsformeln ($\lambda r >> 1,\ \lambda r >> n$)

$$J_n(\lambda r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \cos\left[\lambda r - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

und

$$N_n(\lambda r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \sin\left[\lambda r - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

für die BESSEL- bzw. NEUMANN-Funktionen.