Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 05 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Januar 2008

Aufgabe 01

Wir machen den Ansatz

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k}, \ \lambda \in \mathbb{N}_0$$

gehen damit in die DGL ein

$$0 \overset{!}{=} x^2 \frac{d}{dx^2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda} \right\} + x \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda} \right\} + \left(x^2 - \mu^2\right) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda+k)(\lambda+k-1) x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda+k) x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^2 x^{k+\lambda}$$

$$= a_0 \left[\lambda + \lambda(\lambda-1) - \mu^2\right] \cdot x^{\lambda} + a_1 \left[(\lambda+1)\lambda + (\lambda+1) - \mu^2\right] \cdot x^{\lambda+1}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1) + a_k(\lambda+k) - a_k\mu^2 + a_{k-2}\right] \cdot x^{k+\lambda}$$

und fordern dass alle Koeffizienten verschwinden.

$$a_0 \left[\lambda + \lambda(\lambda-1) - \mu^2\right] = 0$$

$$a_1 \left[(\lambda+1)\lambda + (\lambda+1) - \mu^2\right] = 0$$

$$a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1) + a_k(\lambda+k) - a_k\mu^2 + a_{k-2} = 0 \ \rightarrow \ a_k = \frac{-a_{k-2}}{(\lambda+k)(\lambda+k-1) + (\lambda+k) - \mu^2} = \frac{-a_{k-2}}{\lambda^2 + 2\lambda k + k^2 - \mu^2}$$

Für den Spezialfall $\mu = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{2} \ \vee \ \lambda = -\frac{1}{2} \ \vee \ a_0 = 0$$

und aus der zweiten

$$\lambda = -\frac{3}{2} \ \vee \ \lambda = -\frac{1}{2} \ \vee a_1 = 0$$

Betrachten zuerst den Fall $\lambda = -\frac{1}{2}$. Demnach sind a_1, a_0 beliebig wählbar, und es ergibt sich die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-1)} \ \rightarrow \ a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{(2n)!} \ \wedge \ a_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{a_1}{(2n+1)!}$$

und ferner

$$y = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cos x + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \sin x$$

Für den Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt $a_1 = 0$ und a_0 beliebig. Also:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+1)} \;\rightarrow\; a_{2n+1} = 0 \;\wedge\; a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{(2n+1)!}$$

$$\rightarrow\; y = a_0 \sqrt{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cdot \sin x$$

Analog führt der Fall $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2}$ muss $a_0 = 0$ und $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ sein. Dabei ist diesmal a_1 beliebig, und es folgt

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(k-2)(k-1)} \;\rightarrow\; a_{2n} = 0 \;\wedge\; a_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{a_1}{(2n)!}$$

$$\rightarrow\; y = \frac{a_1}{x\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = \frac{a_1}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{a_1}{\sqrt{x}} \cdot \cos x$$

Demnach ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\boxed{y = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cos x + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \sin x \;,\; a_0, a_1 \in \mathbb{R}}$$

Aufgabe 02

a) Wir gehen mit $y(x) =: \sqrt{x} f(x)$ in die DGL ein und bekommen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{x} \cdot f'' + \frac{f'}{\sqrt{x}} - \frac{f}{4x^{3/2}}$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda x y = x^2 \cdot f'' + x f' + f \left(\lambda x^3 - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Wir substituieren ferner $u^2 = \dfrac{4\lambda}{9} \cdot x^3$, $f(x) =: g(u)$ und bekommen

$$f' = g' \cdot \sqrt{\lambda x}, \;\; f'' = g'' \lambda x + g' \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow\; 0 = x^2 f'' + x f' + f \left(\lambda x^3 - \frac{1}{4} \right) = \lambda x^3 g'' + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x^{3/2} g' + \sqrt{\lambda} x^{3/2} g' + g \left(\lambda x^3 - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4} u^2 g'' + \frac{9}{4} u g' + g \left(\frac{9}{4} u^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\rightarrow\; u^2 g'' + u g' + g \left(u^2 - \frac{1}{9} \right) = 0$$

b) Die allgemeine Lösung dieser Besselschen DGL ergibt sich als

$$g(u) = A J_{\frac{1}{3}}(u) + B J_{-\frac{1}{3}}(u) \;\rightarrow\; y(x) = \sqrt{x} f(x) = \sqrt{x} \cdot A J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + \sqrt{x} \cdot B J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

Wir fordern jedoch dass $y(0)$ endlich ist und wenden unsere Blicke auf den zweiten Term der Lösung. Zu untersuchen wäre inwiefern

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} J_{-\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{3}{2}} \right)$$

endlich ist. Die konstanten Faktoren vor dem x sind hier unwesentlich, da man bei der Grenzwertbildung entsprechende Substitutionen machen kann. Die Besselfunktionen 1. Art sind allgemein gegeben durch

$$J_{-\mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu+j+1)} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2j+\mu}$$

Speziell für unseren Fall also

$$\sqrt{x} J_{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(-\frac{1}{3}+j+1\right)} \cdot 2^{\frac{1}{3}-2j} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2j-\frac{1}{3}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(-\frac{1}{3}+j+1\right)} \cdot 2^{\frac{1}{3}-2j} \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{2j} = \underbrace{\frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}}_{const} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(-\frac{1}{3}+j+1\right)} \cdot 2^{\frac{1}{3}-2j} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{2j}}_{\to 0}$$

Somit ist die allgemeine Lösung auch in $x = 0$ endlich. $\square$