Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 04 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Januar 2008

Aufgabe 01

a) Wir machen den Ansatz

$$u(x,y) = a(x) \cdot b(x)$$

und kommen durch Einsetzen auf

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a'(x)b(y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = a(x)b'(y)$$

$$\rightarrow \ b(y) \cdot a'(x) - xa(x)b'(y) = 0 \ \forall \ x,y \ \rightarrow \ \frac{a'}{xa} = \frac{b'}{b} =: 2h : const$$

Wir lößen die beiden gewöhnlichen DGL

$$\frac{a'}{xa} = 2h \ \rightsquigarrow \ a = Ae^{hx^2}, \quad \frac{b'}{b} = 2h \ \rightsquigarrow \ b = Be^{2hy}, \ A, B \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ A(h)e^{hx^2} + B(h)e^{2hy} \right\} \, dh$$

wobei $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen sein können.
Bemerke dass die allgemeine Lösung auch die trivialen Teillösungen $b = const, \ a = const$ enthalten kann.

b) Wir machen auch hier den Ansatz

$$u(x,y) = a(x) \cdot b(y)$$

und kommen analog zu vorhin auf

$$\frac{xa'}{a} = \frac{2yb'}{b} =: h : const$$

Wir lösen die DGL für jedes h

$$\frac{xa'}{a} = h \ \rightsquigarrow \ a = A\,|x|^h, \quad \frac{2yb'}{b} = h \ \rightsquigarrow \ b = B\,|y|^{\frac{h}{2}}, \ A, B \in \mathbb{R}$$

und schreiben die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL als

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ A(h)\,|x|^h + B(h)\,|y|^{\frac{h}{2}} \right\} \, dh$$

wobei $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen sein können.

Aufgabe 02

Wir machen den Ansatz

$$\varphi(x,t) = u(x) \cdot v(t)$$

und gehen damit in die DGL ein

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = u'' \cdot v, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = u \cdot v''$$

$$\rightarrow \ u'' \cdot v - \frac{1}{c^2} \cdot u \cdot v'' = 0 \ \ \forall \ x,t \ \rightarrow \ \frac{u''}{u} = \frac{v''}{c^2 v} =: h, \ h \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Bemerke dass $h = 0$ also $v'' \equiv 0$ bzw. $u'' \equiv 0$ zu einer Lösung vom Typ

$$\varphi(x,t) = (\alpha_x + \beta_x x) \cdot (\alpha_t + \beta t)$$

führen würde, was dann in Anbetracht der Randbedingung $\varphi(0,t) = 0 = \varphi(L,t)$ nur noch die Lösung

$$\varphi(x,t) \equiv 0$$

zulassen würde. Diese ist aber nichtmal mit den Anfangsbedingungen kompatibel.
Wir lösen die beiden gewöhnlichen DGL also für $h \neq 0$

$$\frac{u''}{u} = h \ \rightsquigarrow \ u_h(x) = A_h e^{\sqrt{h}x} + B_h^{-\sqrt{h}x}, \ A_h, B_h \in \mathbb{C}$$

$$\frac{v''}{c^2 v} = h \ \rightsquigarrow \ v_h(t) = W_h e^{c\sqrt{h}t} + R_h e^{-c\sqrt{h}t}, \ W_h, R_h \in \mathbb{C}$$

und schreiben die allgemeine Lösung

$$\varphi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u_h(x) \cdot v_h(t) \ dh = \int_{\mathbb{R}} \left[A_h e^{\sqrt{h}x} + B_h^{-\sqrt{h}x} \right] \cdot \left[W_h e^{c\sqrt{h}t} + R_h e^{-c\sqrt{h}t} \right] \ dh$$

Durch die Randbedingung

$$\varphi(0,t) = \int_{\mathbb{R}} u_h(0) v_h(t) = 0 = \varphi(L,t) = \int_{\mathbb{R}} u_h(L) v_h(t) \ \forall \ t \ \rightarrow \ u_h(0) = u_h(L) = 0$$

bekommt man

$$A_h + B_h = 0 \ \wedge \ A_h e^{\sqrt{h}L} + B_h e^{-\sqrt{h}L} = 0$$

Für den Fall $h > 0$ folgt

$$\sqrt{h}L = -\sqrt{h}L$$

was unmöglich ist. Betrachten deswegen nur den Fall $h < 0$, und nennen $k := \sqrt{-h}$. Also:

$$A_h \left[e^{ikL} - e^{-ikL} \right] = 2iA_h \sin kL = 0 \ \overset{A_h \neq 0}{\rightarrow} \ kL = n\pi, \ n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ h = -\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \ k_n := \frac{n\pi}{L}$$

Die Eigenfrequenzen der Saite sind genau die $k_n = \frac{n\pi}{L}, \ n \in \mathbb{N}$, und es ergibt sich eine allgemeine Lösung für die Saite als

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[e^{ik_n x} - e^{-iknx} \right] \cdot \left[W_n e^{ickt} + R_n e^{-ickt} \right]$$

Es liegen für eine Kreisfrequenz ck_n genau dort Knotenpunkte vor, wenn $\varphi(x_0, t) = 0 \ \forall \ t$, also

$$\sin k_n x_0 = 0 \ \rightarrow \ x_0 = \frac{mL}{n}, \ m \in \mathbb{N}$$

- **Gezupfte Saite:** Durch die Forderung

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)ick_n\left[W_n-R_n\right]\quad\forall\ x$$

ergibt sich

$$W_h=R_h$$

bzw.

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_nA_n\left(e^{ik_nx}-e^{-ik_nx}\right)\cdot\left(e^{ick_nt}+e^{-ick_nt}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(k_nx)\cdot\cos(ck_nt),\ C_n\in\mathbb{R}$$

Die Anfangsposition $\varphi(x,0)$ der Saite ist gegeben durch die Funktion

$$\varphi(x,0)=:\varphi_0(x)=\Theta(x)\Theta(x_1-x)\cdot\frac{F_0}{x_1}x+F_0\Theta(x-x_1)\Theta(x_2-x)+\Theta(x-x_2)\Theta(L-x)\cdot\frac{F_0(x-L)}{(x_2-L)}$$

Wir fordern also

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(k_nx)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\stackrel{!}{=}\varphi_0(x)$$

$$\rightarrow\ LC_m=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\underbrace{\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ dx}_{L\delta_{nm}}=\int_0^{\infty}\varphi_0(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ dx$$

$$=\frac{F_0}{x_1}\int_0^{x_1}x\sin\left(k_mx\right)\ dx+F_0\int_{x_1}^{x_2}\sin\left(k_mx\right)+\frac{F_0}{x_2-L}\int_{x_2}^{L}(x-L)\sin\left(k_mx\right)$$

$$=\frac{F_0}{x_1}\left[-\frac{x}{k_m}\cos k_mx+\frac{1}{k_m^2}\sin k_mx\right]_0^{x_1}+\frac{F_0}{k_m}\left[-\cos k_mx\right]_{x_1}^{x_2}+\frac{F_0}{x_2-L}\left[-\frac{x}{k_m}\cos k_mx+\frac{1}{k_m^2}\sin k_mx+\frac{L}{k_m}\cos k_mx\right]_{x_2}^{L}$$

$$=\frac{F_0}{x_1k_m^2}\sin(k_mx_1)-\frac{F_0}{(x_2-L)k_m^2}\sin(k_mx_2)$$

und bekommen so die Lösung als

$$\boxed{\varphi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_0}{Lk_n^2}\cdot\left[\frac{1}{x_1}\sin(k_nx_1)+\frac{F_0}{(L-x_2)}\sin(k_nx_2)\right]\cdot\sin(k_nx)\cdot\cos(ck_nt)\ ,\ k_n=\frac{n\pi}{L}}$$

Für die erste Eigenschwingung ($m=1$) ergibt sich somit für $x_2-x_1<<L,\ x_2-x_1<<x_1$ eine Amplitude

$$C_1\approx\frac{F_0}{Lx_1k_1^2}\sin(k_1x_1)-\frac{F_0}{(x_1-L)k_1^2L}\sin(k_1x_1)=\frac{FL^2}{\pi^2x_1(L-x_1)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)$$

und haben so die zu den Wellenzahlen k_n zugehörigen Amplituden ermittelt. Die D'ALEMBERTsche Lösung des Problems erweist sich als

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-ct)+\varphi_0(x+ct)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Theta(x_1-x+ct)\frac{F_0}{x_1}(x-ct)+F_0\Theta(x-ct-x_1)\Theta(x_2-x+ct)+\Theta(x-ct-x_2)\frac{F_0(x-ct-L)}{(x_2-L)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Theta(x_1-x-ct)\frac{F_0}{x_1}(x+ct)+F_0\Theta(x+ct-x_1)\Theta(x_2-x-ct)+\Theta(x+ct-x_2)\frac{F_0(x+ct-L)}{(x_2-L)}\right\}$$

wobei $t>0,\ x\in[0,L]$.

- **Geschlagene Seite:** Die neuen Anfangsbedingungen lauten nun

$$\varphi_0(x) := \varphi(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) := g_0(x) = G_0 \Theta(x - x_1)\Theta(x_2 - x)$$

Das bedeutet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2iA_n \sin k_n x \cdot ick_n \left[W_n - R_n\right] \stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n - C_n\right] \cdot k_n \sin k_n x = G_0 \Theta(x - x_1)\Theta(x_2 - x)$$

$$\rightarrow \;\; L\left[P_m - C_n\right] \cdot k_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n - C_n\right] \cdot k_n \cdot \underbrace{\int_0^{2L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\; dx}_{L\delta_{nm}} = G_0 \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\; dx$$

$$= \frac{LG_0}{m\pi} \cdot \left[\cos\frac{m\pi x_1}{L} - \cos\frac{m\pi x_2}{L}\right]$$

$$\rightarrow \;\; P_m = P_m(C_m) = C_m + \frac{LG_0}{m^2\pi^2} \cdot \left[\cos\frac{m\pi x_1}{L} - \cos\frac{m\pi x_2}{L}\right]$$

(*) : $C_n := 2A_n c W_n, \; P_n := 2A_n c R_n$.
Wir schreiben also die "gefilterte" Lösung als

$$\varphi(x,t) = \frac{i}{c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \cdot \left[C_n e^{ick_n t} + P_n(C_n) \cdot e^{-ick_n t}\right]$$

Obere Gleichung muss der Randbedingung $\varphi(x,0) = 0$ genügen:

$$\varphi(x,0) = \frac{i}{c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \cdot \left[C_n + P_n(C_n)\right] \stackrel{!}{=} 0 \;\forall\; t$$

$$\rightarrow \;\; C_n + P_n(C_n) = 2C_n + \frac{LG_0}{n^2\pi^2} \cdot \left[\cos\frac{n\pi x_1}{L} - \cos\frac{n\pi x_2}{L}\right] = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \;\; C_n = \frac{LG_0}{2n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x_2}{L} - \cos\frac{n\pi x_1}{L}\right] = -P_n$$

Eingesetzt ergibt sich die entgültige Lösung als

$$\boxed{\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \cdot \sin ck_n t \cdot \frac{LG_0}{cn^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x_1}{L} - \cos\frac{n\pi x_2}{L}\right]}$$

Für $x_2 - x_1 << L, \; x_2 - x_1 << x_1$ können wir für kleine n äherungsweise schreiben

$$\cos k_n x_1 - \cos k_n x_2 = -2\sin\left(\frac{k_n}{2}(x_1 + x_2)\right)\sin\left(\frac{k_n}{2}(x_1 - x_n)\right) \approx \sin\left(k_n x_1\right) \cdot k_n(x_2 - x_1)$$

und erhalten für die ersten Amplituden

$$\Phi_n \approx \frac{G_0}{cn\pi}\sin(k_n x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

Die D'ALEMBERTsche Lösung des Problems lautet

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x - ct) + \varphi_0(x + ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_0(\tau) d\tau = \frac{G_0}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Theta(\tau - x_1)\Theta(x_2 - \tau)\; d\tau$$

$$= \frac{G_0}{2c}\left[\min\left\{x_2, x + ct\right\} - \max\left\{x_1, x - ct\right\}\right] \cdot \Theta(x + ct - x_1) \cdot \Theta(x_2 - x + ct)$$