Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

23. November 2007

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 04: Der Separationsansatz für die Wellengleichung

Aufgabe 1: Vorbereitung: Zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lösen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$i)\ \frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad\qquad ii) x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Aufgabe 02: Die Schwingende Saite

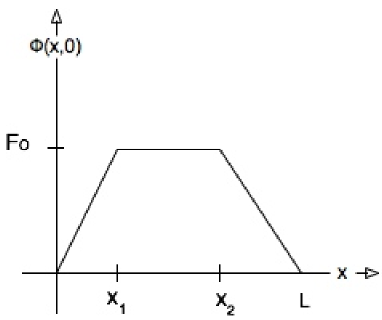
a) Behandeln Sie durch Separation der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

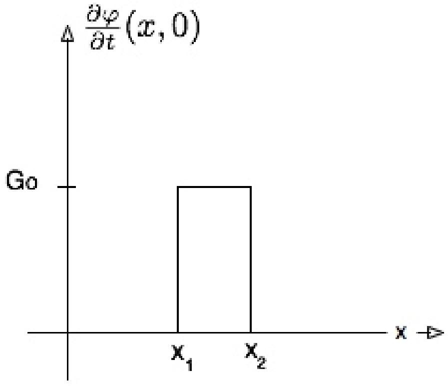
die Schwingungen einer an ihren Enden dauerhaft fest eingespannten Saite der Länge L. Die Auslenkung der Saite aus ihrer Ruhelage ist $\varphi(x, t)$.

Wählen Sie folgende *Anfangsbedingungen:*

- **Gezupfte Saite:** $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = 0$ und



- **Geschlagene Saite:** $\varphi(x, 0) = 0$ und



b) Geben Sie für beide Fälle die ersten Eigenfrequenzen, die zugehörigen Amplituden sowie die Knotenpunkte an.

c) Diskutieren Sie für beide Anfangsbedingungen die Amplituden der niedrigen, mit Reihenentwicklung verträglichen Eigenschwingungen unter der Bedingung

$$(x_2 - x_1) << L \quad \wedge \quad (x_2 - x_1) << x_1$$

d) Stellen Sie den Zusammenhang der erhaltenen Lösungen mit der D'ALEMBERTschen Lösung des jeweiligen Problems her.