Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 03 - Lösungen

Stilianos Louca

23. November 2007

Aufgabe 01

a) Die DGL

$$\sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

sei unter dem Ansatz

$$\varphi(x_1, ..., x_n, t) = f(p), \ p = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \mu t$$

allgemein Lösbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{df}{dp} \frac{dp}{dx_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{df}{dp} \lambda_i \right) = \frac{d^2 f}{dp^2} \lambda_i^2$$

Eingesetzt ergibt

$$\frac{d^2 f}{dp^2} \sum_i \lambda_i^2 = \frac{\mu^2}{c^2} \frac{d^2 f}{dp^2}$$

Die triviale Lösung wäre

$$\frac{d^2 f}{dp^2} \equiv 0 \ \rightarrow \ f(p) = C_1 \cdot p + C_2, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Andernfalls muss gelten

$$\sum_i \lambda_i^2 = \frac{\mu^2}{c^2}$$

b) Durch die Normierung $\mu = \pm c$ ergibt sich

$$\sum_i \lambda_i^2 = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Die Zahlen l, m, n stellen die so genannten Wellenzahlen in der Wellenfunktion dar (Dispersion):

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \ \rightarrow \ p = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm ct$$

Doch das bedeutet genau dass der Wellenvektor

$$\left\| \vec{k} \right\| = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

in der Gleichung normiert ist, bzw. die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium genau c beträgt. Die Gleichung $p = const$ entspricht den Charakteristiken der DGL:

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = \mp ct$$

die die Bewegung der Wellenfronten ($\varphi : const$) beschreiben.

Aufgabe 02

a) Die Anfangsauslenkung ist gegeben durch

$$u(x,0) =: u_0(x) = \Theta(x+a)\cdot\Theta(a-x)\cdot\sin\frac{\pi x}{a}$$

b) Die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

mit dem Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G_0(x)$$

ergibt sich allgemein aus

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G_0(\tau)\ d\tau$$

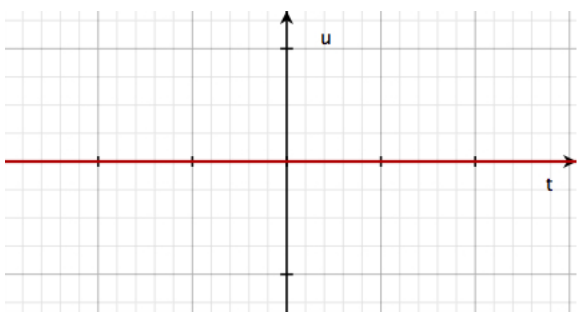
Speziell für unseren Fall ist $G_0 \equiv 0$, und es folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Theta(x-ct+a)\cdot\Theta(a-x+ct)\cdot\sin\frac{\pi(x-ct)}{a} + \Theta(x+ct+a)\cdot\Theta(a-x-ct)\cdot\sin\frac{\pi(x+ct)}{a}\right]$$

c)
- Für $x = 0$ ergibt sich

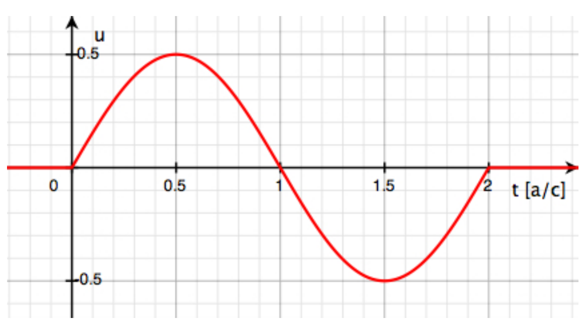
$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[\Theta(a-ct)\Theta(a+ct)\sin\left(-\frac{\pi ct}{a}\right) + \Theta(a+ct)\Theta(a-ct)\sin\left(\frac{\pi ct}{a}\right)\right] \equiv 0$$

Die Saite wird im Nullpunkt also nie ausgelenkt.



- Für $x = a$ folgt für $t \geq 0$

$$u(a,t) = \frac{1}{2}\left[\Theta(2a-ct)\Theta(ct)\sin\left(\pi - \frac{\pi ct}{a}\right) + \underbrace{\Theta(2a+ct)\Theta(-ct)\sin\left(\pi + \frac{\pi ct}{a}\right)}_{0}\right] = \frac{1}{2}\Theta(2a-ct)\Theta(ct)\sin\frac{\pi ct}{a}$$



- Für $x = \dfrac{a}{2}$ ergibt sich

$$u\left(\frac{a}{2}, t\right) = \frac{1}{2}\left[\Theta\left(\frac{3a}{2} - ct\right)\Theta\left(\frac{a}{2} + ct\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi ct}{a}\right) + \Theta\left(\frac{3a}{2} + ct\right)\Theta\left(\frac{a}{2} - ct\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi ct}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Theta(3a - 2ct)\Theta(a + 2ct) + \Theta(3a + 2ct)\Theta(a - 2ct)\right] \cdot \cos\frac{\pi ct}{a}$$