Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

22. November 2007

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 3: Die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung

Aufgabe 1: Die dreidimensionale Wellengleichung

a) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

in Analogie zum eindimensionalen Fall. Formulieren Sie dazu die Bedingung, unter der beliebige Funktionen $f(p)$ mit p als Linearkombination

$$p = lx + my + nz + \mu t$$

der Variablen x, y, z und t eine Lösung $\varphi(x, y, z, t) = f(p)$ der Wellengleichung sind.

b) Wählen Sie nun die "Normierung" $\mu = \pm c$ und geben Sie die geometrische Bedeutung der oben genannten Bedingung, der Koeffizienten l, m und n sowie der Gleichungen $p = const$ an.

Aufgabe 02: Eine unendlich lange Saite Eine unendlich lange Saite, auf der sich Wellen mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, habe die Anfangsauslenkung

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{a} & : -a \le x \le a \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$$

Sie wird zur Zeit $t = 0$ aus dem Ruhezustand losgelassen, und ihre Auslenkung ist $u(x, t)$.

a) Schreiben Sie die Anfangsauslenkung als *eine* Funktion mit Hilfe von HEAVISIDEschen Sprungfunktionen auf.

b) Geben Sie die D'ALEMBERTsche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für jede Zeit $t > 0$ an.

c) Berechnen und skizzieren Sie die Auslenkung $u(x, t)$ als Funktion der Zeit für

$$i)\ \ x = 0 \qquad\qquad ii)\ \ x = a \qquad\qquad iii)\ \ x = \frac{a}{2}$$