Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 02 - Lösungen

Stilianos Louca

16. November 2007

Aufgabe 01

a) Die DGL

$$A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,\ A = 1,\ B = 0,\ C = 1$$

is elliptisch da $B - 4AC = -4 < 0$.

b) Die triviale Lösung ist gegeben durch

$$U = ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Über den Ansatz

$$U = U(\lambda x + y)$$

kommt man durch

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda^2 \cdot \frac{d^2 U}{d(\lambda x + y)^2},\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{d^2 U}{d(\lambda x + y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (\lambda^2 + 1) \cdot \frac{d^2 U}{d(\lambda x + y)^2} = 0$$

$$\rightsquigarrow \lambda = \pm i$$

auf

$$U = U_1(ix + y) + U_2(-ix + y)$$

wobei U_1, U_2 beliebige Funktionen sein können, die oberen Ansatz erfüllen.
Probe: Wir setzen die Lösung in die DGL ein

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{dU_1}{d(ix + y)} \cdot \frac{\partial(ix + y)}{\partial x} + \frac{dU_2}{d(-ix + y)} \cdot \frac{\partial(-ix + y)}{\partial x} = i \cdot \left(\frac{dU_1}{d(ix + y)} - \frac{dU_2}{d(-ix + y)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = i^2 \cdot \left(\frac{d^2 U_1}{d(ix + y)^2} + \frac{d^2 U_2}{d(-ix + y)^2}\right)$$

$$Analog: \ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{d^2 U_1}{d(ix + y)^2} + \frac{d^2 U_2}{d(-ix + y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(i^2 + 1\right) \cdot \left(\frac{d^2 U_1}{d(ix + y)^2} + \frac{d^2 U_2}{d(-ix + y)^2}\right) = 0 \quad \square$$

Aufgabe 02

a) Ist $\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = A\cos(kp+\delta)$ dann ergibt sich für die Wellenfunktion

$$\varphi(x,t) = A\cos(kx - kct + \delta) + \cos(kx + kct + \delta) = 2A\cos(kx+\delta)\cos(kct)$$

Diese stellt eine stehende Welle der Kreisfrequenz $\omega := kc$ und einem Knotenabstand $d = \frac{\pi}{k}$. Die Maximalamplitude dieser Welle beträgt $2A$.

b) Die Knotenpunkte sind gegeben durch die Forderung dass $\cos(kx+\delta) \stackrel{!}{=} 0$, also

$$kx + \delta = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ x = \frac{\pi(2n+1)}{2k} - \frac{\delta}{k}$$

Aufgabe 03

a) Setzen

$$A := 1,\ B := 2v,\ C := \left(v^2 - \frac{\sigma}{\mu A}\right)\ \rightarrow\ A\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$$

und machen den Ansatz $\varphi = \varphi(p),\ p := \lambda t + x$. Dadurch kommen wir auf

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \lambda^2\frac{d^2\varphi}{dp^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dp^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} = \lambda\frac{d^2\varphi}{dp^2}$$

$$\rightarrow\ \left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right)\cdot\frac{d^2\varphi}{dp^2} = 0$$

Wir untersuchen die nicht trivialen Lösungen, und bekommen aus

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} = -v \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\sigma}{\mu A}}}_{c}$$

die allgemeine Lösung in Form von

$$\varphi(x,t) = \varphi_1\left(ct - vt + x\right) + \varphi_2\left(-ct - vt + x\right)$$

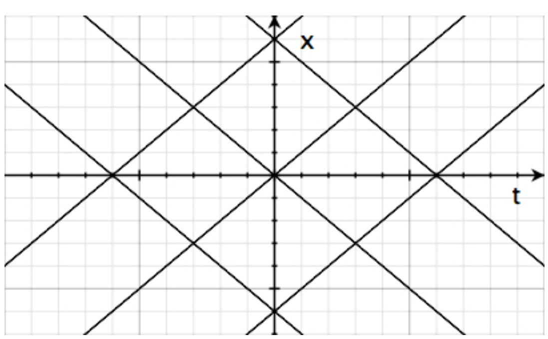
Aus oberem Ausdruck kann man erkennen dass sich φ aus zwei verschiedenen Wellen mit den Geschwindigkeiten $ct - vt$ und $ct + vt$ zusammensetzt.

b) Die DGL für die Charakteristiken ergeben sich aus der Forderung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} = v \pm c$$

Somit sind die Charakteristiken

$$x_1 = (v+c)\cdot t + C_1,\ x_2 = (v-c)\cdot t + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$



c) Die Randbedingung

$$\varphi(x,0) = a\cos kx,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = 0$$

ergibt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = (c-v)\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} - (c+v)\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2} = (c-v)\frac{d\varphi_1}{dp_1} - (c+v)\frac{d\varphi_2}{dp_2}$$

$$= (c-v)\frac{d\varphi_1}{dx} - (c+v)\frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(c-v)\varphi_1 - (c+v)\varphi_2\right] = 0 \ \rightarrow\ (c-v)\varphi_1(x) - (c+v)\varphi_2(x) = C_1$$

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = a\cos kx \ \rightarrow\ \varphi_1(x) = \frac{(c+v)}{2c}\cdot\left(a\cos kx + \frac{C_1}{c+v}\right),\ \varphi_2(x) = \frac{(c-v)}{2c}\cdot\left(a\cos kx - \frac{C_1}{c-v}\right)$$

$$\rightarrow\ \varphi(x,t) = \varphi_1(x+(c-v)t) + \varphi_2(x-(c+v)t) = \frac{a}{2c}\cdot\left[(c+v)\cos\left(kx + \underbrace{k(c-v)}_{\omega_1}\cdot t\right) + (c-v)\cos\left(kx - \underbrace{k(c+v)}_{\omega_2}\cdot t\right)\right]$$

$$= \frac{a(c+v)}{2c}\cos(\omega_1 t + kx) + \frac{a(c-v)}{2c}\cos(\omega_2 t - kx)$$

Oberes entspricht genau einer Superposition zweier Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen, Geschwindigkeiten und Amplituden.