

Mathematische Übungen für Physiker III

FSU Jena - WS 2007/2008

9. November 2007

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 2: Die Charakteristiken-Methode

Aufgabe 1: Die zweidimensionale LAPLACE-Gleichung

- a) Charakterisieren sie die zweidimensionale LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

als hyperbolische, parabolische oder elliptische Differentialgleichung.

- b) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung an und machen Sie anschließend die Probe.

Aufgabe 2: Stehende Wellen

- a) Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x - ct) + \varphi_2(x + ct)$$

Interpretieren Sie diese Lösung für den Fall, dass die Funktionen φ_1, φ_2 die gleichen Funktionen von ihrem jeweiligen Argument sind, nämlich

$$\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = A \cos(kp + \delta)$$

- b) Bestimmen Sie die Lage der Knotenpunkte, an denen zu keiner Zeit ein Ausschlag φ stattfindet.

Aufgabe 3: Wellenbewegung eines Schlauches

Eine inkompressible Flüssigkeit mit der Dichte μ und vernachlässigbarer Viskosität fließt mit der Geschwindigkeit v durch einen dünnen, geraden und flexiblen Schlauch mit der Querschnittsfläche A , der unter einer Spannung σ gehalten wird. Kleine transversale Auslenkungen φ des Schlauches genügen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \left(v^2 - \frac{\sigma}{\mu A} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

- a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung eine Superposition zweier Wellen ist, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Setzen Sie zur Probe Ihre Lösung in die Differentialgleichung ein.
- b) Skizzieren Sie die Charakteristiken dieser Gleichung in einem (t, x) -Diagramm.
- c) Der Schlauch habe anfangs eine kleine transversale Auslenkung $\varphi = a \cos kx$ und werde plötzlich aus dem Ruhezustand losgelassen. Berechnen Sie die anschließende Bewegung des Schlauches.