Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 07 - Lösungen

Stilianos Louca

3. Juli 2007

Bemerkungen: Ist $f(x)$ eine als Fourier-Integral dargestellte reelle Funktion dann gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \Re\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Re\left\{g(\omega)e^{i\omega t}\right\} d\omega$$

Ist ferner $g(\omega)$ reell dann folgt

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \cos \omega t \; d\omega$$

Sei $g_\tau(\omega)$ die Fourier-Transformierte von $f(t-\tau)$, $\tau : const$. Dann gilt

$$g_\tau(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+\tau)} du = e^{-i\omega\tau} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = g(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$$

Aufgabe 01

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega \;:\; g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{a}^{\infty} e^{-(b+i\omega)x} dx$$

$$\frac{-1}{2\pi(b+i\omega)} \cdot \left[e^{-i(b+i\omega)a} - e^{-ab\infty} \cdot e^{-i\omega\infty}\right] = -\frac{e^{-(b+i\omega)a}}{2\pi(b+i\omega)} = -\frac{(b-i\omega)\cdot e^{-(b+i\omega)a}}{2\pi(b^2+\omega^2)} = -\frac{e^{-(b+i\omega)a - i\arctan\frac{\omega}{b}}}{2\pi\sqrt{b^2+\omega^2}}$$

$$\Rightarrow \; f(x) = -\frac{e^{-ba}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-a) - i\arctan\frac{\omega}{b}}}{\sqrt{b^2+\omega^2}} d\omega = -\frac{e^{-ba}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\omega(x-a) - \arctan\frac{\omega}{b}\right)}{\sqrt{b^2+\omega^2}} d\omega$$

Aufgabe 02

Die Funktion ist beschrieben durch

$$f(t) = \begin{cases} f_0 + \dfrac{f_0}{t_0} \cdot t & : t \in [-t_0, 0] \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

Die Fourier-Transformation erfolgt wie folgt

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \ : \ g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{f_0}{2\pi} \cdot \int_{-t_0}^{0} \left[1 + \frac{t}{t_0} \right] \cdot e^{-i\omega t} \ dt$$

$$= \frac{f_0}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-\omega t}}{-i\omega} + \frac{1}{t_0} \cdot \left(\frac{te^{-i\omega t}}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \right]_{-t_0}^{0} = \frac{f_0}{2t_0 \omega^2 \pi} \cdot \left[1 + i\omega t_0 - e^{i\omega t_0} \right]$$

$$\Rightarrow \ f(t) = \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} + i\omega t_0 e^{i\omega t} - e^{i\omega(t_0+t)}}{\omega^2} d\omega = \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t - \sin(\omega(t+t_0)) - \cos(\omega(t+t_0))}{\omega^2} d\omega$$

$$= \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t - \cos(\omega(t+t_0))}{\omega^2} d\omega$$

da $\sin(\omega(t+t_0))$ eine ungerade Funktion ist! Anderseits gilt

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{f_0}{t_0} & : t \in [-t_0, 0] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

und

$$f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(\omega) i\omega}_{h(\omega)} \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

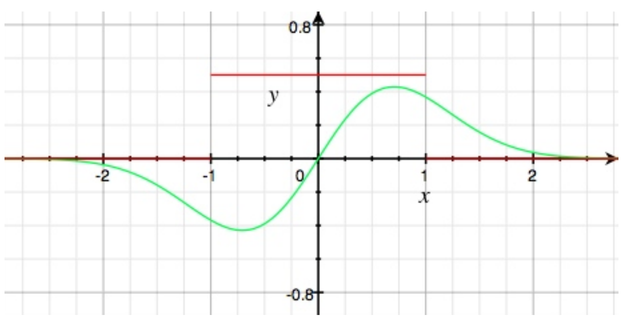
woraus folgt

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-t_0}^{0} e^{-i\omega t} dt = \frac{f_0}{-2i\omega t_0 \pi} \cdot \left[e^{-i\omega t} \right]_{-t_0}^{0} = \frac{if_0}{2\omega t_0 \pi} \left[1 - e^{i\omega t_0} \right] = i\omega g(\omega)$$

$$\Rightarrow \ g(\omega) = \frac{f_0}{2\omega^2 t_0 \pi} \cdot \left[1 - e^{i\omega t_0} \right] \Rightarrow \ f(t) = \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega(t+t_0)}}{\omega^2} d\omega = \frac{f_0}{2t_0\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t - \cos(\omega(t+t_0))}{\omega^2} d\omega$$

Aufgabe 03

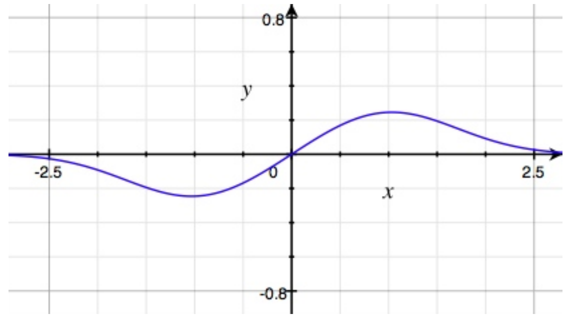
a) Die beiden Funktionen sehen wie folgt aus:



b) Da Faltungsintegral berechnet sich folgendermaßen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du = \int_{t-1}^{t+1} \frac{u}{2} \cdot e^{-u^2} du = \frac{-1}{4} \cdot \left[e^{-u^2} \right]_{t-1}^{t+1} = \frac{e^{-t^2-1}}{4} \cdot \left(e^{2t} - e^{-2t} \right)$$

c) Die Funktion $h(t)$ sieht wie folgt aus:



Aufgabe 04

a) Die Faltung des Impulses ergibt sich als

$$h_f(t) := (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{1} f(\tau)f(t-\tau)d\tau = \max\{0, 2-|t|\} \cong \begin{cases} 2-|t| & : |t| \leq 2 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

Dessen Fourier-Transformierte ist dementsprechend

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2}^{2} (2-|t|)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_{-2}^{0} (2+t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{2} (2-t)e^{-i\omega t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-\int_{2}^{0} (2-u)e^{i\omega u}du + \int_{0}^{2} (2-t)e^{-i\omega t}dt\right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{0}^{2} (2-t)\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{2} (2-t)\cos\omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{2\sin\omega t}{\omega} - \frac{t\sin\omega t}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega^2}\right]_0^2 = \frac{1}{\pi\omega^2} \cdot (1-\cos 2\omega) = \frac{2}{\pi\omega^2} \cdot \sin^2\omega$$

$$\Rightarrow \; h_f(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cos\omega t \, d\omega$$

b) Sind $f(t), g(t) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei als Fourier-Reihen dargestellte Funktionen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad\qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right] g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}g^*(t)dt \, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)e^{i\omega t}dt\right]}_{\mathcal{G}^*(\omega)} \cdot \mathcal{F}(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}^*(\omega)\mathcal{F}(\omega)d\omega$$

Ferner gilt

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^*(\omega)\mathcal{F}(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^2(\omega)d\omega$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot h_f(0) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi^2}{4}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h_f^2(t)dt = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{16}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Aufgabe 05

Sei

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t^2}$$

eine Standardnormalverteilungsdichte mit der Standardabweichung $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dem Mittelwert $\mu = 0$. Sei weiter $\mathcal{F}(\omega)$ ihre Fourier-Transformierte

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega,\ \ \mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Diese ist auch eine Standardnormalverteilungsdichtefunktion mit der Standardabweichung σ_1 und Mittelwert μ_1:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{F}(-\omega) = \mathcal{F}^*(\omega) = \mathcal{F}(\omega)$ da $f, \mathcal{F} \in \mathbb{R}$. Daraus schließt man dass $\mu_1 = 0$ (Symmetrie um die Y-Achse). Außerdem gilt

$$\mathcal{F}(0) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^0dt = \frac{1}{2\pi}\ \Rightarrow\ \sigma_1 = 1\ \Rightarrow\ \mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Ferner gilt also

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau^2}e^{-(t-\tau)^2}d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f(t-\tau)d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\underbrace{f^*(t-\tau)}_{=f^*(\tau-t)}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(\omega)\mathcal{F}_t(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^2(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}e^{-i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2}}_{Gauss'sche\ Glockenkurve}e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\cdot 2\pi\Theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\Theta(t)$$

wobei Θ auch wieder eine Gauss'sche Glockenkurve mit der Standardabweichung σ_2 und dem Mittelwert μ_2 ist! Da die eigen-Faltung einer Gauss'schen Glockenkurve allgemein bei $t = 0$ maximal wird muss auch $\mu_2 = 0$. Ferner gilt

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau^2}d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^0 = \frac{1}{4\sigma_2\sqrt{\pi}}\ \Rightarrow\ \sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

woraus entgültig folgt

$$h(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2\pi t^2}$$

Es folgen die Funktionen e^{-t^2} und $h(t)$.