Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007

9. August 2007

Thema 7: FOURIER-Transformationen

Aufgabe 1 : Fourier-Transformation I

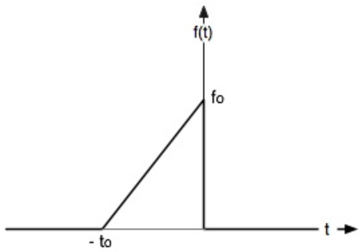
Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Funktion

$$f(x) = \Theta(x-a)e^{-bx}$$

wobei $\Theta(x)$ die HEAVISIDEsche Sprungfunktion bedeutet.

Aufgabe 02 : Fourier-Transformation II

Berechnen Sie die Fourier-Transformation des in der Abbildung gezeigten Signals



a) durch direkte Berechnung des Transformationsintegrals,

b) indem Sie das Signal zuerst nach der Zeit ableiten und die Transformation auf bekannte Transformationen zurückführen.

Aufgabe 03 : Faltung

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : -1 < t < +1 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

und

$$g(t) = te^{-t^2}$$

a) Zeichnen Sie $f(t)$ und $g(t)$ für alle t.

b) Berechnen Sie das Faltungsintegral

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

c) Zeichnen Sie $h(t)$.

Aufgabe 04 : Rechteck-Puls

a) Berechnen Sie die Faltung des Einheits-Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| < 1 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

mit sich selbst und ohne weitere Integration auch dessen Fourier-Transformierte.

b) Leiten Sie mit Hilfe des PARSEVALschen Theorems die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \, d\omega = \pi$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4} \, d\omega = \frac{2\pi}{3}$$

her.

Aufgabe 05 : GAUSSsche Glockenkurve

Benutzen Sie die Tatsache, dass die Fourier-Transformierte einer Gaussschen Glockenkurve wieder eine Gausssche Glockenkurve ist, um das Faltungsintegral

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} e^{-(t-\tau)^2} \, d\tau$$

zu berechnen. Skizzieren Sie $h(t)$ und e^{-t^2} in einer Abbildung.