Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 06 - Lösungen

Stilianos Louca

1. Juli 2007

Aufgabe 01

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(t) = 1 - \left|\frac{2t}{\pi} - 1\right|$$

b) Durch den Ansatz

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$$

kommt man durch bestimmen der Koeffizienten a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) \cdot \sin(nt)\ dt = \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \sin nt\ dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - t) \cdot \sin nt\ dt \right)$$

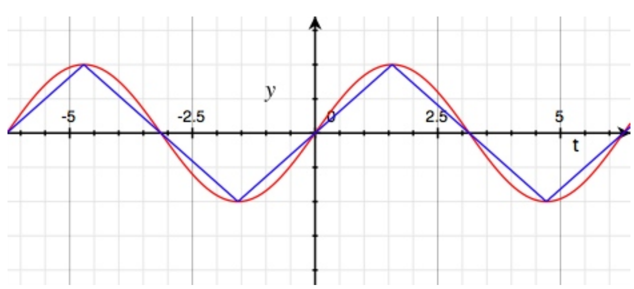
$$= \frac{2}{\pi^2} \cdot \left\{ \left[-\frac{t \cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{\pi \cos nt}{n} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \left[\frac{t \cos nt}{n} - \frac{\sin nt}{n^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right\} = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & : n \textit{ ungerade} \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases}$$

auf

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \cdot \sin(2n-1)t$$

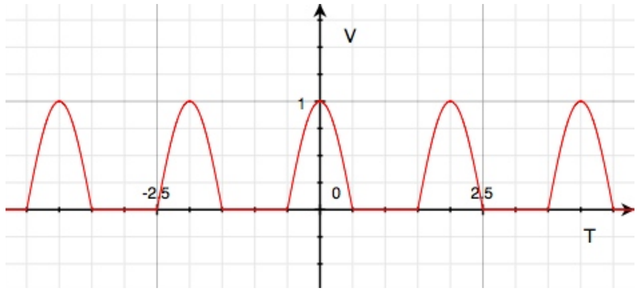
c) ...

d) Vergleich mit der Funktion $g(t) = \sin t$ ergibt



Aufgabe 02

a) • Die Funktion $V(t)$ sieht für $T = V_0 = 1$ wie folgt aus



• Über den Fourierreihen-Ansatz

$$F_V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

kommt man auf

$$a_0 = \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} V(t)\ dt = \frac{V_0}{2T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\ dt = \frac{V_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^{T} V(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\ dt = \frac{2V_0}{T} \cdot \int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\ dt$$

$$= \frac{V_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi t(n-1)}{T}\right) + \cos\left(\frac{\pi t(n+1)}{T}\right)\right]\ dt = \frac{V_0}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(n-1)t}{T}\right)}{(n-1)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi(n+1)t}{T}\right)}{(n+1)}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2V_0 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)} & : n\ gerade \\ 0 & : sonst \end{cases} \quad ,\ n > 1$$

Für $n = 1$ ergibt sich

$$a_1 = \frac{2V_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)\ dt = \frac{V_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right] dt = \frac{V_0}{2}$$

Zusammengefast ergibt sich

$$V(t) = \frac{V_0}{\pi} + \frac{V_0}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) - \frac{2V_0}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Für $t = 0$ und $V_0 = \pi$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} = V(0) - \frac{\pi}{2} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)}$$

b) Über den Ansatz

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx$$

kommt man auf

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \; dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \; dx = \frac{2}{n} \cdot \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi} \cdot \sin \pi n = -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n}$$

$$\Rightarrow \; F_f(x) = -2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin nx$$

Daraus folgt

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{4} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ...$$

Aufgabe 03

a) Da die *Grundperiode* von $f(x)$ gleich π ist, ergibt sich für $\omega_n = 2n$.

b) Für $f(x) = \sin^2 x$ ist $A_0 \neq 0$ da das *zeitliche Mittel* von f positiv ist.

c) Es gilt allgemein

$$a_n + ib_n := A_n = A_{-n}^* = a_n - ib_n$$

$$\Rightarrow \; f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + ib_n)(\cos \omega_n x + i \sin \omega_n x) + (a_n - ib_n)(\cos \omega_n x - i \sin \omega_n x)]$$

$$= A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [2a_n \cos \omega_n x - 2b_n \sin \omega_n x] = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [2a_n \cos 2nx - 2b_n \sin 2nx]$$

- Da $\sin^2(x)$ eine gerade Funktion ist muss sie nur als *cos*-Reihe darstellbar sein, weshalb alle b_n verschwinden müssen und so alle A_n reell sind.
- Die Funktion $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ist auch gerade weshalb analog wie vorhin alle A_n reell sind.
- Da $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ weder gerade noch ungerade ist dürfen im allgemeinen weder alle a_n noch alle b_n verschwinden, die Koeffizienten A_n sind also allgemein Komplex.

d) Aus

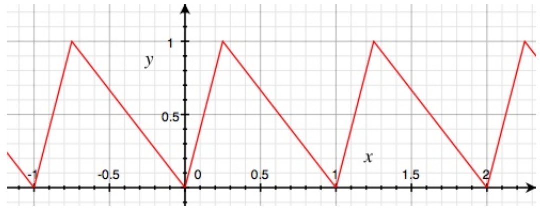
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

folgt dass $A_0 = \frac{1}{2}$ und $A_1 = a_1 = -\frac{1}{4}$. Alle anderen a_n, b_n sind 0.

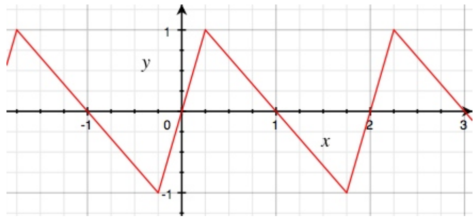
Aufgabe 04

a) Folgende Graphiken entsprechen den Werten $y_0 = 1 = L$.

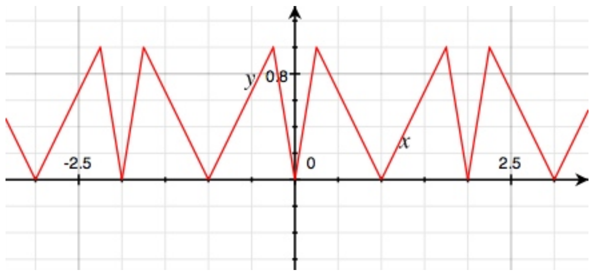
- Periode-L:



- Antisymmetrie: Periode $2L$.



- Gerade Funktion: Periode $2L$.



b) Der Wert a_0 von (iii) ist die durch die Funktion und die X-Achse eingeschlossene Fläche durch die entsprechende Grundlänge:

$$a_0 = \frac{y_0 L}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{y_0}{2}$$

c) Über den Ansatz

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \; f(x) = \begin{cases} \dfrac{4y_0 x}{L} & : x \in \left(0, \frac{L}{4}\right) \\[2ex] \dfrac{4y_0}{3} - \dfrac{4y_0 x}{3L} & : x \in \left(\frac{L}{4}, L\right) \\[2ex] -f(-x) & : x \in (-L, 0) \\[2ex] 0 & : x \in \{-L, 0, L\} \end{cases}$$

und dementsprechend

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \; dx = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \; dx = \frac{2}{L} \cdot \left[\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{4y_0 x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \; dx + \int_{\frac{L}{4}}^{L} \left(\frac{4y_0}{3} - \frac{4y_0 x}{3L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \; dx \right]$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \left\{ \frac{Ly_0}{n\pi} \cdot \left[-\cos \frac{n\pi}{4} + \frac{4}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right] + \frac{4Ly_0}{3n\pi} \cdot \left[\cos \frac{n\pi}{4} - \cos n\pi \right] - \frac{4Ly_0}{3n\pi} \cdot \left[-\cos n\pi + \underbrace{\frac{\sin n\pi}{n\pi}}_{=0} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right] \right\}$$

$$= \frac{32 y_0}{3n^2\pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}, \; \sin \frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & : x = 4k \\[2ex] -\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{4}}}{\sqrt{2}} & : x = 4k-1 \\[2ex] -(-1)^{\frac{n+2}{4}} & : x = 4k-2 \\[2ex] -\dfrac{(-1)^{\frac{n+3}{4}}}{\sqrt{2}} & : x = 4k-3 \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \; F_f(x) = -\frac{32 y_0}{3\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left\{ \frac{\sin \frac{(4n-1)\pi x}{L}}{\sqrt{2}(4k-1)^2} + \frac{\sin \frac{(3n-2)\pi x}{L}}{(4k-2)^2} + \frac{\sin \frac{(3n-3)\pi x}{L}}{\sqrt{2}(4k-3)^2} \right\}$$