

# Mathematische Übungen für Physiker II

## FSU Jena - SS 2007

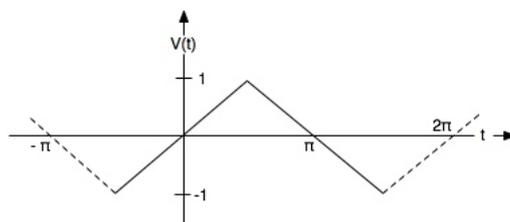
9. August 2007

### Thema 6: FOURIER-Reihen

---

#### Aufgabe 1: Die Dreieck-Schwingung

Die Abbildung zeigt die sogenannte Dreieck-Schwingung.



- Schreiben Sie die Funktion  $V(t)$  auf, welche die Dreieck-Schwingung im Intervall  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$  beschreibt.
- Entwickeln Sie diese Funktion für den Fall, dass sie sich periodisch wiederholt, in eine FOURIER-Reihe.
- Stellen Sie das Spektrum der Dreieck-Schwingung graphisch dar.
- Vergleichen Sie alle Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten für eine sinus-Schwingung mit gleicher Amplitude und Periode.

#### Aufgabe 02 : Reihendarstellungen der Zahl $\pi$

- Gegeben sei die periodische Funktion

$$V(t) = \begin{cases} V_0 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & : -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & : \frac{T}{2} \leq |t| \leq T \end{cases}$$

- Skizzieren Sie die Funktion im Intervall  $-3T \leq t \leq 3T$ .
- Bestimmen Sie alle FOURIER-Koeffizienten dieser Funktion und schreiben Sie die FOURIER-Reihe auf.
- Berechnen Sie die FOURIER-Reihe an der Stelle  $t = 0$  und gewinnen Sie die Reihendarstellung

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

für die Zahl  $\pi$ .

- Berechnen Sie die FOURIER-Reihe der Funktion  $f(x) = x$  im Intervall  $-\pi < x < \pi$ . Leiten Sie aus dem Ergebnis die Darstellung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

der Zahl  $\pi$  ab.

### Aufgabe 03 : Komplexe FOURIER-Reihen

Betrachten Sie eine komplexe Fourier-Reihe in der Form

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_n x}$$

und beantworten Sie die folgenden Fragen, ohne die Fourier-Koeffizienten vorher zu bestimmen:

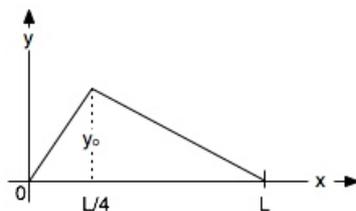
- Welchen Wert hat  $\omega_n$  für  $f(x) = \sin^2 x$ ?
- Ist  $A_0$  für  $f(x) = \sin^2 x$  gleich Null oder von Null verschieden?
- Sind die Koeffizienten  $A_n$  reell, rein imaginär oder komplex für
  - $f(x) = \sin^2 x$
  - $f(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{2})$
  - $f(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$  ?

Bestimmen Sie nun alle Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe für  $f(x) = \sin^2 x$  ohne Berechnung eines einzigen Integrals.

Hinweis: Stellen Sie  $\sin^2 x$  durch  $\cos 2x$  dar.

### Aufgabe 04 : Auslenkung einer Saite

Eine Saite werde an ihren Enden bei  $x = 0$  und  $x = L$  festgehalten und im Punkt  $x = \frac{L}{4}$  in Richtung  $y$  um den Betrag  $y_0$  ausgelenkt.



- Skizzieren Sie jeweils eine Fortsetzung dieser Saite für das Gebiet außerhalb des Intervalls  $0 \leq x \leq L$ , die
  - auf eine Fourier-Reihe mit der Periode  $L$  führt,
  - eine Fourier-Reihe erzeugt, die antisymmetrisch um  $x = 0$  ist,
  - eine Fourier-Reihe erzeugt, die nur cosinus-Glieder enthält.
- Geben Sie für die zweite und dritte Fortsetzung jeweils die Periode und für letztere den Wert von  $a_0$  an.
- Berechnen Sie die Fourier-Reihe für die zweite Fortsetzung.