

Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 05 - Lösungen

Stilianos Louca

18. Juni 2007

Aufgabe 01

a)

$$\text{Induktionsvoraussetzung : } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

$$\text{Induktionsanfang : } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(1)}(x - x_0) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x - x_0) dx = (-1)^1 f^{(1)}(x_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschritt : } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n+1)}(x - x_0) dx &= \left[\delta^{(n)}(x - x_0) f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)} \delta^{(n)}(x - x_0) dx \\ &= -(-1)^n f^{(n+1)}(x_0) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \quad \square \end{aligned}$$

b)

$$\Omega := \int x^m f(x) \delta^{(n)}(x) dx = [x^m f(x)]^{(n)}(0) \cdot (-1)^n = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[(x^m)^{(k)} \cdot (f(x))^{(n-k)} \right](0)$$

$$\text{Für } m > n : (x^m)^{(k)}(0) = 0 \rightarrow \Omega = 0$$

$$\text{Für } m = n : \Omega = (-1)^n n! \cdot f(0) = \int f(x) (-1)^n \delta(x) dx \quad \text{da} \quad (x^m)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & : k < m \\ k! & : k = m \end{cases}$$

$$\text{Für } m < n : \Omega = (-1)^n \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot m! f^{(n-m)}(0) = \frac{(-1)^n n! f^{(n-m)}(0)}{(n-m)!}$$

$$= \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!} \cdot f^{(n-m)}(0) (-1)^{n-m} = \int \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!} \cdot f(x) \delta^{(n-m)}(x) dx \quad \square$$

c)

$$\begin{aligned}
& (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \Delta [\delta(x)\delta(y)\delta(z)] \\
&= \delta^{(2)}(x)x^2\delta(y)\delta(z) + \delta^{(2)}(x)\delta(y)y^2\delta(z) + \delta^{(2)}(x)\delta(y)\delta(z)z^2 \\
&+ \delta^{(2)}(y)\delta(x)x^2\delta(z) + \delta^{(2)}(y)y^2\delta(x)\delta(z) + \delta^{(2)}(y)\delta(x)\delta(z)z^2 \\
&+ \delta^{(2)}(z)\delta(x)x^2\delta(y) + \delta^{(2)}(z)\delta(x)\delta(y)y^2 + \delta^{(2)}(z)z^2\delta(x)\delta(y) \\
&= (2\delta(x)\delta(y)\delta(z) + 0 + 0) + (0 + 2\delta(x)\delta(y)\delta(z) + 0) + (0 + 0 + 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)) = 6\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 02

a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(g(x))dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d(g(x))}\delta(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{d}{d(g(x))}\delta(g(x)) \cdot d(g(x)) \\
&= [f(x) \cdot \delta(g(x))]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{d(g(x))} \cdot \delta(g(x))d(g(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot \frac{dx}{d(g(x))} \cdot \delta(g(x))g'(x) dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot \delta(g(x))dx \quad \square
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
Sub: u := x^2 &\rightsquigarrow \int_0^{\infty} e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^2 - 1)dx = \int_0^{\infty} \left[e^x \sin \frac{\pi x}{2} \right]' \cdot \delta(x^2 - 1)dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{\sqrt{u}} \cdot \left(\sin \frac{\pi \sqrt{u}}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi \sqrt{u}}{2} \right) \cdot \delta(u - 1) \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
Sub: u := \cos x &\rightsquigarrow \int_0^5 e^{\sin x} \delta'(\cos x)dx = \left[\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^5 \right] (e^{\sin x})' \delta(\cos x)dx = \left[\int_1^{-1} + \int_{-1}^{\arccos 5} \right] u e^{\sqrt{1-u^2}} \delta(u) \frac{du}{-\sqrt{1-u^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d)

$$Sub: u := x^2 + x \rightsquigarrow \int_{-0.1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} e^x \right) \delta'(x^2 + x)dx = \int_{-0.09}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{-1+\sqrt{1+4u}}{2}} \right) \delta(u) \frac{du}{\sqrt{1+4u}} = 1$$

Aufgabe 03

a) Die Linienladungsdichte $\lambda(x)$ ist gegeben durch

$$\lambda(x) = \frac{Q}{L} \cdot \left[\theta \left(x + \frac{L}{2} \right) - \theta \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]$$

wobei $\theta(x)$ die Hevisidesche Sprungfunktion ist. Ferner ist die Raumladungsdichte μ der Ladung gegeben durch

$$\mu(x, y, z) = \lambda(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

Integration über den gesamten Raum liefert wie erwartet

$$\int_V \mu(x, y, z) dV = \int_x \lambda(x) dx \int \delta(y) dy \int \delta(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Q}{L} dx = Q$$

b) In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, x) ergibt sich eine Dichte von

$$\mu(\rho, \varphi, x) = \frac{\lambda(x) \cdot \delta(\rho)}{2\pi\rho}$$

Integration verifiziert dieses Ergebniss

$$\int_V \mu(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho d\rho d\varphi dx = \frac{1}{2\pi} \int_x \lambda(x) dx \int_{\varphi} d\varphi \int_{\rho} \delta(\rho) d\rho = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda(x) dx = Q$$

Aufgabe 04

Die Flächendichte $\sigma(\theta)$ auf der Kugeloberfläche ist gegeben durch $\sigma = \alpha \cos \theta$, $\alpha : \text{const.}$ Da auf der oberen Halbkugel $A^o : \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Gesamtladung Q liegt, muss gelten

$$Q = \int_{A^o} \sigma dA = \int_{\varphi} \int_{\theta} r_0^2 \sin \theta \cdot \sigma(\theta) d\varphi d\theta = r_0^2 \alpha \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r_0^2 \alpha \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \alpha \pi r_0^2$$

woraus folgt dass

$$\alpha = \frac{Q}{\pi r_0^2}$$

Die entsprechende Raumladungsdichte μ ist gegeben durch

$$\mu(\rho, \theta, \varphi) = \delta(\rho - r_0) \cdot \sigma(\theta)$$

Integration über eine beliebige Kugel mit dem Radius $R > r_0$ liefert wie erwartet

$$\int_V \mu dV = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 \delta(\rho - r_0) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad \square$$