# Mathematische Übungen für Physiker II
# FSU Jena - SS 2007

9. August 2007

**Thema 5:** Die DIRACsche Delta-Funktion II, Die HEAVISIDEsche Sprungfunktion

---

**Aufgabe 1: Die Ableitung der Delta-Funktion**

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\ dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

gilt.

b) Zeigen Sie durch Multiplikation mit einer Funktion $f(x)$ und Integration:

$$x^n \delta^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & : m > n \\ (-1)^n n! \delta(x) & : m = n \\ \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}(x) & : m \leq n \end{cases}$$

Hinweis: Machen Sie von der LEIPNIZschen Produktregel

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}}$$

Gebrauch, indem Sie darin $u = x^m$ und $v = f(x)$ setzen.

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie die LEIPNIZsche Produktregel durch vollständige Induktion.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabenteil b), dass

$$(x^2+y^2+z^2)\Delta\left[\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] = 6\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

gilt.

**Aufgabe 02 : Die Ableitung der Delta-Funktion von komplizierteren Argumenten**

a) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(g(x))\ dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(g(x))\ dx$$

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil a) und analog zur Aufgabe 4/3 die Integrale

- $$\int_{0}^{\infty} e^x \sin\frac{\pi x}{2}\delta'(x^2-1)\ dx$$

- $$\int_0^5 e^{\sin x}\delta'(\cos x)\; dx$$

- $$\int_{-0.1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}e^x\right)\delta'(x^2+x)\; dx$$

**Aufgabe 03 : Die HEAVISIDEsche Sprungfunktion**

Eine elektrische Ladung $Q$ sei gleichmäßig auf der $x$-Achse zwischen $x = -\frac{L}{2}$ und $x = \frac{L}{2}$ verteilt.

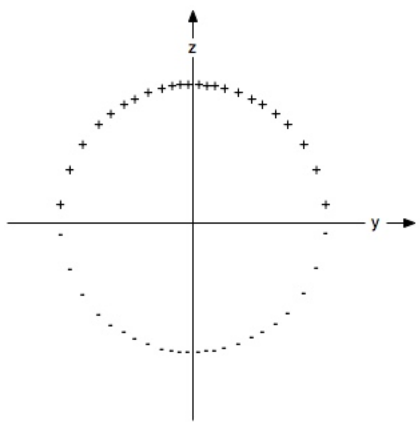
a) Schreiben Sie mit Hilfe der HEAVISIDEschen Sprungfunktion die Linien- und die Raumladungsdichte dieser Ladungsverteilung in kartesischen Koordinaten auf.

b) Welche Gestalt hat die Raumladungsdichte in Zylinderkoordinaten?

Machen Sie in beiden Fällen die Probe, indem Sie durch Volumenintegration der Raumladungsdichte die Gesamtladung berechnen.

**Aufgabe 04 : Eine Raumladungsdichte in Kugelkoordinaten**

Außerhalb eine Kugeloberfläche entsteht ein elektrisches Dipolfeld, wenn die Ladungsdichte $\sigma$ auf dieser Oberfläche proportional zu $\cos\vartheta$ ist.




Geben Sie die Raumladungsdichte $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten an, wenn die Kugel den Radius $r_0$ hat und auf ihrer oberen Hälfte die Ladung $+Q_0$ und auf der unteren Hälfte die Ladung $-Q_0$ trägt.

Hinweis: Das Integral der Flächenladungsdichte über die Kugeloberfläche muss gleich dem Volumenintegral der Raumladungsdichte über ein Volumen sein, das diese Fläche einschließt. Wählen Sie als dieses Volumen eine konzentrische Kugel mit dem Radius $R > r_0$.