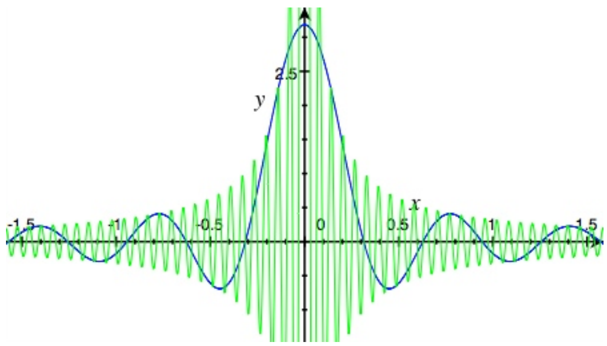
Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 04 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Juni 2007

Aufgabe 01



$$Sub: \; u := nx \;\; \rightsquigarrow \;\; \int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} \right) f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{nx_1}^{nx_2} \frac{\sin u}{\pi u} f\left(\frac{u}{n}\right) du$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} f(0)du = \frac{f(0)}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = f(0) & : x_1 < 0 < x_2 \\ -f(0) & : x_2 < 0 < x_1 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

Aufgabe 02

a)

$$\int_{-\infty}^{3} \cos x \delta(x-\pi)dx = 0$$

b)

$$\int_{-\infty}^{3.2} \cos x \delta(x-\pi)dx = \cos \pi = -1$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \delta(x-\pi)dx = \cos \pi = -1$$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\delta(x)dx = 0 \cdot f(0) = 0$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+3)\delta(5-x)dx = 5^2+3 = 28$$

Aufgabe 03

a)

$$Sub:\ u := ax \ \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-ax+b)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{a}\right)\delta(b-u)\frac{du}{|a|} = \frac{1}{|a|}\cdot f\left(\frac{b}{a}\right)$$

b)

$$Sub:\ u := x^2 \ \rightsquigarrow \int_{1}^{\infty} \sin x\delta\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)dx = \int_{1}^{\infty} \sin\sqrt{u}\cdot\delta\left(u-\frac{\pi^2}{4}\right)\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}\cdot\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

c)

$$Sub:\ u := x^2 \ \rightsquigarrow \int_{0}^{\infty} \ln x\cdot\delta(x^2-4)dx = \int_{0}^{\infty} \ln\sqrt{u}\cdot\delta(u-4)\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\ln 2}{4}$$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x^2+a^2)dx = \begin{cases} 0 & : a > 0 \\ \frac{f(0)}{0}\ NAN & : a = 0 \end{cases}$$

e)

$$Sub:\ u := \sin\pi x \ \rightsquigarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2\cdot\delta(\sin\pi x)dx = \left[\int_{-1.1}^{-0.9} + \int_{-0.1}^{0.1} + \int_{0.9}^{1.1}\right]\left\{(x+1)^2\cdot\delta(\sin\pi x)dx\right\}$$

$$= \left[\int_{\sin(-1.1\pi)}^{\sin(-0.9\pi)} + \int_{\sin(-0.1\pi)}^{\sin 0.1\pi} + \int_{\sin 0.9\pi}^{\sin 1.1\pi}\right]\left\{\left(\frac{\arcsin u}{\pi}+1\right)^2\delta(u)\frac{du}{\pi\sqrt{1-u^2}}\right\}$$

$$= \left(\frac{\arcsin\sin(-\pi)}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-\sin^2(-\pi)}} + \left(\frac{\arcsin\sin 0}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-\sin^2 0}} + \left(\frac{\arcsin\sin(\pi)}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-\sin^2(\pi)}}$$

$$= \left(\frac{-\pi}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi} + \left(\frac{0}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi} + \left(\frac{\pi}{\pi}+1\right)^2\frac{1}{\pi} = \frac{5}{\pi}$$

Aufgabe 04

a) Eine Linienladungsdichte wäre folgende

$$\lambda(x) := \delta(f(x))\cdot g(x),\quad f(x) := \left\{\left(x+\frac{a}{2}\right) \mod a\right\} - \frac{a}{2},\ g(x) := q\cdot\cos\left(\frac{x\pi}{a}\right)$$

Bemerkung:

$$f(x) \mid \left[ak-\frac{a}{2}, ak+\frac{a}{2}\right) \cong x-ak,\ k\in\mathbb{Z}$$

Probe: In der *Umgebung* einer bestimmten Punktladung an der Stelle $x = ka,\ k \in \mathbb{Z}$ ergibt sich

$$\Delta q = \int_{ka-\varepsilon}^{ka+\varepsilon} \delta(f(x)) \cdot g(x)dx = \int_{ka-\varepsilon}^{ka+\varepsilon} \delta(x - ka) \cdot g(x)dx = g(ka),\ 0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$$

was genau den Forderungen entspricht! Analog definieren wir eine Raumladungsdichte wie folgt

$$\rho(x, y, z) := \lambda(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

Probe: In der Umgebung einer Punktladung an der Stelle $(ka, 0, 0)$ ergibt sich

$$\Delta q = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{ka-\varepsilon}^{ka+\varepsilon} \lambda(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(ka) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z) \cdot dy \cdot dz = g(ka),\ 0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$$

Befindet sich im Koordinatenursprung eine negative Ladung so ersetzt ist einfach $g(x)$ mit $-g(x)$ zu ersetzen.

Variante:

$$\lambda(x) = q \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - na)$$

b) Wir definieren die Flächenladungsdichte analog zu vorhin

$$\sigma(x, y) := q \cdot \delta(f_x(x)) g_x(x) \cdot \delta(f_y(y)) g_y(y)$$

$$f_x(x) := \left\{ \left(x + \frac{a}{2} \right) \mod a \right\} - \frac{a}{2},\ g_x(x) := \cos\left(\frac{x\pi}{a}\right)$$

$$f_y(y) := \left\{ \left(y + \frac{b}{2} \right) \mod b \right\} - \frac{b}{2},\ g_y(y) := \cos\left(\frac{y\pi}{b}\right)$$

und die Raumladungsdichte als

$$\rho(x, y, z) := \sigma(x, y) \cdot \delta(z)$$

c)
- $$\rho(x, y, z) := q \cdot \delta(z) \cdot \delta(f(x)) \cdot \delta(f(y)) \cdot g(x, y)$$

  $$f(t) := \left| t - \frac{a}{2} \right| - \frac{a}{2},\ g(x, y) := \cos\left(\frac{x\pi}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{y\pi}{a}\right)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \rho(x, y, z) = q \cdot [g(0, 0) + g(0, a) + g(a, 0) + g(a, a)] = 0$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \vec{r}\rho(x, y, z) = 0 \cdot g(0, 0, 0) + a \cdot g(a, 0) \cdot \vec{e}_x + a \cdot g(0, a) \cdot \vec{e}_y + a \cdot g(a, a) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

  $$= q \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) - q \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = 0$$