Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007

9. August 2007

Thema 4: Die DIRACsche Delta-Funktion

Aufgabe 1: Eine Folge von sinc-Funktionen

Betrachten Sie die Folge sogenannter sinc-Funktionen

$$\Delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

a) Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem diese Funktionen für $n = 10$ und $n = 100$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge von sinc-Funktionen für $n \to \infty$ wie eine Delta-Funktion wirkt, indem Sie nachweisen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} \right) f(x)\ dx = \begin{cases} f(0) & : x_1 < 0 < x_2 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

gilt.

Hinweis: Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Aufgabe 02 : Integrale mit Delta-Funktionen

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- $$\int_{-\infty}^{3} \cos x\ \delta(x-\pi)\ dx$$
- $$\int_{-\infty}^{3.2} \cos x\ \delta(x-\pi)\ dx$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\ \delta(x-\pi)\ dx$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \delta(x)\ dx$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+3)\delta(5-x)\ dx$$

Aufgabe 03 : Integrale mit Delta-Funktionen von komplizierteren Argumenten

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-ax+b)\ dx$$

- $$\int_{1}^{\infty} \sin x\ \delta\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\ dx$$

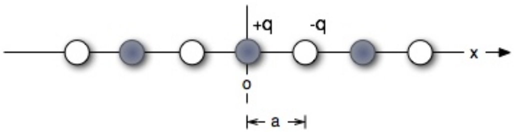
- $$\int_{0}^{\infty} \ln x\ \delta(x^2-4)\ dx$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x^2+a^2)\ dx, \quad a \neq 0$$

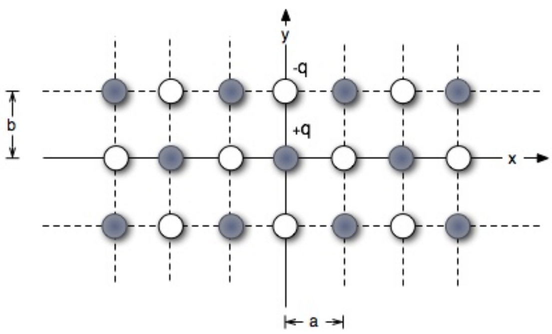
- $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2\delta(\sin \pi x)\ dx$$

Aufgabe 04 : Die Ladungsdichte von Ionenkristallen

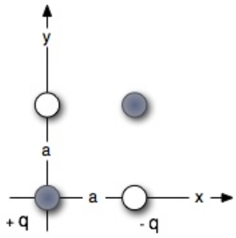
a) Ein eindimensionaler Ionenkristall bestehe aus einer unendlich ausgedehnten Anordnung von Punktladungen gleicher Größe q mit alternierenden Vorzeichen, die sich in gleichen Abständen a auf der x-Achse befinden. An der Stelle $x = 0$ sitze eine positive Ladung. Schreiben Sie die Linienladungsdichte $\lambda(x)$ und die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ dieser Anordnung auf und überzeugen Sie sich anhand ausgewählter Punktladungen, dass ihre Resultate den Kristall richtig beschreiben. Wie ändert sich die Linienladungsdichte, wenn sich im Koordinatenursprung eine negative Ladung befindet?



b) Betrachten Sie nun einen zweidimensionalen Ionenkristall, bei dem sich Ladungen vom gleichen Betrag q auf einem unendlichen rechteckigen Gitter befinden, wobei die nächsten Nachbarn einer jeden Punktladung Ladungen mit zu dieser entgegengesetztem Vorzeichen sind. Wieder soll sich eine positive Ladung im Ursprung des Koordinatensystems befinden. Der Abstand benachbarter Ladungen sein in x-Richtung a und in y-Richtung b. Geben Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ und die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ dieses zweidimensionalen Kristalls an.



c) Ein elektrischer Quadrupol bestehe aus vier dem Betrage nach gleich großen Punktladungen, die wie in der Abbildung angeordnet sein sollen.



- Schreiben Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabenteil b) die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ des Quadrupols auf.
- Berechnen Sie das elektrische Monopolmoment

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \rho(x, y, z)$$

und das Dipolmoment

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \vec{r}\ \rho(x, y, z)$$

der Anordnung.