Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 03 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Mai 2007

Aufgabe 01

Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Ortsvektor $\vec{r}$ kann also durch $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_\rho$ beschrieben werden.

a) Die beiden Ortsvektoren sind gegeben durch $\vec{r}_1 = r_1 \cdot \vec{e}_{\rho_1}$ und $\vec{r}_2 = \cdot\vec{e}_{\rho_2}$. Der Winkel α zwischen ihnen ist gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 \cdot r_2} = \vec{e}_{\rho_1} \cdot \vec{e}_{\rho_2} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

b) Sind x, y, z die Komponenten von $\vec{r}$ bzgl. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ und $K_\rho, K_\varphi, K_\theta$ bzgl. $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ dann gilt

$$\rho\sin\theta\cos\varphi = x = \vec{r}\cdot\vec{e}_x = K_\rho\cdot\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_x + K_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_x + K_\theta\cdot\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_x = K_\rho\sin\theta\cos\varphi - K_\varphi\sin\varphi + K_\theta\cos\theta\cos\varphi \ \Rightarrow\ K_\rho = \rho,\ K_\theta = K_\varphi = 0$$

also

$$\vec{r}_1 = r_1 \cdot \vec{e}_\rho \ \wedge\ \vec{r}_2 = r_2 \cdot \vec{e}_\rho$$

c) Die in Winkeln gemessenen Seitenlängen des Dreiecks entsprechen den Winkeln zwischen den Ortsvektoren zu den drei Sternen. Sind $\vec{r}_w, \vec{r}_d, \vec{r}_a$ diese drei Vektoren und $\beta_{wd}, \beta_{wa}, \beta_{da}$ die drei gesuchten Winkel so gilt

$$\beta_{wd} = \arccos\left(\sin\theta_w \sin\theta_d \cos(\alpha_w - \alpha_d) + \cos\theta_w\cos\theta_d\right) \approx 15.4^\circ$$

Analog bekommt man $\beta_{wa} \approx 31.6^\circ$ und $\beta_{da} \approx 37.0^\circ$

Aufgabe 03

a)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_0 - r\cos\theta)\cdot\cos\varphi \\ (R_0 - r\cos\theta)\cdot\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x},\ r = \sqrt{\left(R_0 - \sqrt{y^2+x^2}\right)^2 + z^2},\ \theta = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \begin{cases} \in (-\pi/2, \pi/2) & : \sqrt{x^2+y^2} < R_0 \\ \in (\pi/2, 3\pi/2) & : \mathit{sonst} \end{cases}$$

Die Koordinatenlinien $r = \mathit{const}$ und $\theta = \mathit{const}$ haben die Gestalt von *Streifen* bzw. *horizontalen Kurven* entlang des Toroids um den Koordinatenursprung herum.

b)

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \vec{e}_r$$

$$\vec{g}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\theta = \frac{\vec{g}_\theta}{r}$$

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -(R_0 - r\cos\theta)\cdot\sin\varphi \\ (R_0 - r\cos\theta)\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{g}_\varphi}{R_0 - r\cos\theta}$$

Sie stehen orthogonal da $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\theta = 0$. Durch Verifizierung der Korkenzieherregel schließt man dass es sich um ein Rechtssystem handelt.

c) Da die Tangenteneinheitsvektoren eine Orthonormalbasis bilden gilt $g_{ij} := \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_i g_2 \cdot \delta_{ij}$. Demzufolge:

$$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \sum_{ij} \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \cdot dx^i \cdot dx^j = \sum_i g_{ii}(dx^i)^2 = dr^2 + (R_0 - r\cos\theta)^2 \cdot d\varphi^2 + r^2 \cdot d\theta^2$$

$$g_{rr} = 1, \ g_{\varphi\varphi} = (R_0 - r\cos\theta)^2, \ g_{\theta\theta} = r^2$$

d) Es gilt: $g := \det(g_{ij}) = r \cdot (R_0 - r\cos\theta)$.

$$dV = \sqrt{g}\cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr = r\cdot(R_0 - r\cos\theta)\cdot d\varphi\cdot d\theta\cdot dr$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} (rR_0 - r^2\cos\theta)\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi = 2R_0 r_0^2 \pi^2$$

$$dA = r(R_0 - r\cos\theta)\cdot d\theta\cdot d\varphi \ \Rightarrow \ A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R_0 - r\cos\theta)\cdot d\theta\cdot d\varphi = 4r_0 R_0 \pi^2$$

e) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\vec{r}} = \vec{g}_r \cdot \dot{r} + \vec{g}_\theta \cdot \dot{\theta} + \vec{g}_\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Es ist klar das die Geschwindigkeit nur vom Ort abhängt. Gibt es also eine Periode T nach der das Teilchen sich immer wieder an einem Ort P befindet so ist die Bahn in sich geschlossen. Da sich θ und φ mit konstanten Geschwindigkeiten ändern ist die Position des Teilchens beschrieben durch

$$r = r_0 = const, \ \varphi = \varphi_0 + \omega t, \ \theta = \theta_0 + \Omega t$$

Sei o.B.d.A $\theta_0 = \varphi_0 = 0$. Dann suchen wir eine Zeit T so dass

$$\omega\cdot T = 2\pi k, \ \Omega\cdot T = 2\pi n, \ n, k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ \frac{\omega}{\Omega} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω und Ω müssen also in einem rationalen Verhältnis zu einander stehen.

f)

$$grad\ U = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}\cdot\vec{e}_\theta + \frac{1}{R_0 - r\cos\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$div\ \vec{a} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r(R_0 - r\cos\theta)}\cdot\left[a_\theta r\sin\theta + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + a_r(R_0 - 2r\cos\theta)\right]$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{(R_0 - 2r\cos\theta)}{r(R_0 - r\cos\theta)}\cdot\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\sin\theta}{r(R_0 - r\cos\theta)}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{(R_0 - r\cos\theta)^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$