Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007

9. August 2007

Thema 3: Krummlinige Orthogonalkoordinaten

Aufgabe 1: Kugelkoordinaten

Die Punkte P_1 und P_2 haben die Kugelkoordinaten $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ bzw. $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$.

a) Berechnen Sie den Winkel γ zwischen den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.
Hinweis: Vereinfachen Sie die Ergebnisse weitestgehend mit Hilfe der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen.

b) Berechnen Sie die sphärischen Komponenten des Vektors $\vec{r}_2$ im Punkt P_1 sowie des Vektors $\vec{r}_1$ im Punkt P_2.
Hinweis: Stellen Sie alle Vektoren durch die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ dar und drücken Sie die jeweiligen Komponenten aber in Kugelkoordinaten aus.

c) **Beispiel** zu Aufgabenteil a):
Die jeweils hellsten Sterne in den Sternbildern Leier (Wega), Schwan (Deneb) und Adler (Atair) bilden ein sphärisches Dreieck am Himmel, welches man Sommerdreieck nennt.

Im rotierenden Äquatorsystem der sphärischen Astronomie wird die sphärische Koordinate φ in der Ebene des Himmelsäquators vom Frühlingspunkt aus gezählt und heißt Rektaszension α. Dieser Winkel wird üblicherweise im Zeitmaß gemessen, wobei 24 h einem Winkel 360° entsprechen. Statt der Winkeldistanz ϑ zum Himmelspol wird häufiger der Komplementwinkel $\delta = 90° - \vartheta$, die sog. Deklination, angegeben.

Die Himmelskoordinaten der drei genannten Sterne sind:

- Wega: $\alpha = 18$ h 35.2 min, $\delta = +38°44'$
- Deneb: $\alpha = 20$ h 39.7 min, $\delta = +45°06'$
- Atair: $\alpha =$19 h 48.3 min, $\delta = +08°44'$

Berechnen Sie die Seitenlängen des Sommerdreiecks und geben Sie die Resultate in dezimalgeteilten Grad an.

Aufgabe 02 : $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$ in Zylinderkoordinaten

In kartesischen Koordinaten (x, y, z) gilt wegen der konstanten Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ für den auf einen Vektor $\vec{a}$ angewandten LAPLACE-Operator $(\Delta\vec{a})_i = \Delta a_i$. Daher ist in diesem Fall die Vektoridentität

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$$

auch für die Komponenten erfüllt:

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = \Delta a_i$$

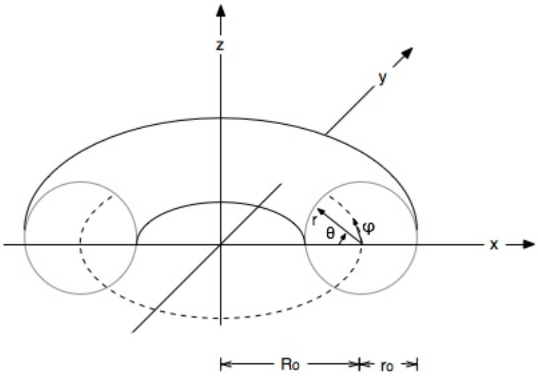
Zeigen Sie durch Berechnung von $(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})$ einerseits und $\Delta\vec{a}$ anderseits, dass in den Zylinderkoordinaten (r, φ, z) die Vektoridentität ihre Gültigkeit behält, also

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = (\Delta\vec{a})_i$$

gilt, ihre Anwendung auf die einzelnen Komponenten jedoch nicht erlaubt ist, weil sich i.allg. $(\Delta\vec{a})_i$ von Δa_i unterscheidet.
Hinweis: Machen Sie von der ,,Formelsammlung zur Vektoranalysis" Gebrauch.

Aufgabe 03 : Toruskoordinaten

Kernfusionsreaktoren vom Typ ,,Tokamak" haben die Gestalt eines Torus. Berechnungen für diese Maschinen werden oft in den Toruskoordinaten (r, ϑ, φ) durchgeführt (siehe Abbildung).



a) Stellen Sie aufgrund der Abbildung den Zusammenhang zwischen Toruskoordinaten und kartesischen Koordinaten her. Welche Gestalt und Lage haben die Koordinatenlinien, für die $r =$const und $\vartheta =$const gilt?

b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren sowie die Tangenten-Einheitsvektoren der Koordinatenlinien. Stehen letztere orthogonal aufeinander und bilden sie in der Reihenfolge $\vec{e}_r - \vec{e}_\vartheta - \vec{e}_\varphi$ ein Rechtssystem?

c) Berechnen Sie das Linienelement ds^2 und lesen Sie daraus die metrischen Koeffizienten für die Toruskoordinaten ab.

d) Berechnen Sie das Volumenelement aus der JACOBI-Determinante und daraus das Volumen eines Torus mit dem Radius $r = r_0$. Berechnen Sie weiterhin dessen Oberfläche und geben Sie beiden Resultaten eine anschauliche Bedeutung.

e) Berechnen Sie in Toruskoordinaten den Vektor der Geschwindigkeit.
Ein Teilchen bewege sich auf einem Torus mit dem Radius $r = r_0$ und den Kreisfrequenzen $\dot{\vartheta} = \Omega$ sowie $\dot{\varphi} = \omega$. Welche Bedingung müssen die beiden Frequenzen erfüllen, damit die Teilchenbahn nach einer bestimmten Zeit in sich zurückläuft?

f) Geben Sie in Toruskoordinaten Ausdrücke für $\operatorname{grad} U$ und $\operatorname{div} \vec{a}$ an und schreiben Sie die LAPLACE-Gleichung $\Delta U = 0$ auf.