Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 02 - Lösungen

Stilianos Louca

1. Mai 2007

Aufgabe 01

Annahme: $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\} =: \mathcal{M}$.

a)

$$\delta_{ik}\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$$

b)

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}\delta_{im} = \sum_{j,k,i,m\in\mathcal{M}} \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}\delta_{im} = 3$$

c)

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \sum_{j,k\in\mathcal{M}} \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$$

d)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \sum_{i,j\in\mathcal{M}} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

e)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i,j,k\in\mathcal{M}} \varepsilon_{ijk}^2 = 3! = 6$$

Aufgabe 02

$$A_i := [a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a)]_i = a_j \cdot (b \times c)_k \cdot \varepsilon_{ijk} + c_j \cdot (a \times b)_k \cdot \varepsilon_{ijk} + b_j \cdot (c \times a)_k \cdot \varepsilon_{ijk}$$

$$= a_j \cdot b_l \cdot c_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{ijk} + c_j \cdot a_l \cdot b_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{ijk} + b_j \cdot c_l \cdot a_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{ijk}$$

$$= a_j \cdot b_l \cdot c_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{ijk} + a_j \cdot b_l \cdot c_m \cdot \varepsilon_{kjl} \cdot \varepsilon_{imk} + a_j \cdot b_l \cdot c_m \cdot \varepsilon_{kmj} \cdot \varepsilon_{ilk}$$

$$= \sum_{j,l,m} a_j \cdot b_l \cdot c_m \cdot \Omega_{ijlm}$$

$$\Omega_{ijlm} := \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{klm} + \varepsilon_{imk} \cdot \varepsilon_{kjl} + \varepsilon_{ilk} \cdot \varepsilon_{kmj} = \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{kij} + \varepsilon_{kjl} \cdot \varepsilon_{kim} + \varepsilon_{kmj} \cdot \varepsilon_{kil}$$

$$= (\delta_{li} \cdot \delta_{mj} - \delta_{lj} \cdot \delta_{mi}) + (\delta_{ji} \cdot \delta_{lm} - \delta_{jm} \cdot \delta_{li}) + (\delta_{mi} \cdot \delta_{jl} - \delta_{ml} \cdot \delta_{ji}) = 0 \;\Rightarrow\; A_i = 0 \;\forall\; i \in \mathcal{M} \quad \square$$

Aufgabe 03

a)

$$a \cdot (b \times c) = a_i \cdot (b_j \cdot c_k \cdot \varepsilon_{ijk}) = (a_i \cdot b_j \cdot \varepsilon_{kij}) \cdot c_k = c \cdot (a \times b) = (b_j \cdot c_k \cdot \varepsilon_{jki}) \cdot a_i = a \cdot (b \times c) \quad \Box$$

Für $a \cdot (b \times a)$ ergibt sich offensichtlich 0 denn $a \cdot (b \times a) = b \cdot (a \times a) = b \cdot 0 = 0$

b)

- $$((a \times b) \times (c \times d))_i = (a_l \cdot b_m \cdot \varepsilon_{jlm}) \cdot (c_r \cdot d_t \cdot \varepsilon_{krt}) \cdot \varepsilon_{ijk} = a_l \cdot b_m \cdot c_r \cdot d_t \cdot \varepsilon_{jlm} \cdot (\delta_{ri} \cdot \delta_{tj} - \delta_{rj} \cdot \delta_{ti})$$

  $$= a_l \cdot b_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot (\delta_{ri} \cdot \delta_{tk} \cdot c_r \cdot d_t - \delta_{rk} \cdot \delta_{ti} \cdot c_r \cdot d_t) = a_l \cdot b_m \cdot \varepsilon_{klm} \cdot (d_k \cdot c_i - c_k \cdot d_i)$$

  $$= [[d \cdot (a \times b)] \cdot c - [c \cdot (a \times b)] \cdot d]_i = ([d \cdot (a \times b)] \cdot c - [a \cdot (b \times c)] \cdot d)_i \quad \Box$$

- $$[d \cdot (a \times b)] \cdot c - [a \cdot (b \times c)] \cdot d + [b \cdot (c \times d)] \cdot a - [c \cdot (d \times a)] \cdot b = (a \times b) \times (c \times d) + (c \times d) \times (a \times b)$$

  $$= (a \times b) \times (c \times d) - (a \times b) \times (c \times d) = 0 \quad \Box$$

- Für $a = \vec{i},\ b = \vec{j},\ c = \vec{k}$ ergibt sich

  $$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{d} \cdot \vec{k}\right) \cdot \vec{k} - \vec{d}$$

  was im Endeffekt die *negierte* Projektion von $\vec{d}$ auf die XY Ebene ist.

Aufgabe 04

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = a_i \cdot b_j \cdot \varepsilon_{kij} \cdot c_l \cdot d_m \cdot \varepsilon_{klm} = a_i \cdot b_j \cdot c_l \cdot d_m \cdot (\delta_{il} \cdot \delta_{jm} - \delta_{im} \cdot \delta_{jl})$$

$$= a_i \cdot b_j \cdot (\delta_{il} \cdot \delta_{jm} \cdot c_l \cdot d_m - \delta_{im} \cdot \delta_{jl} \cdot c_l \cdot d_m) = a_i \cdot b_j \cdot (c_i \cdot d_j - c_j \cdot d_i) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b \cdot c) \quad \Box$$

Aufgabe 05

Es ergibt sich

$$\det(A) = \det(A) \cdot \varepsilon_{123} = \det(A) \cdot \varepsilon_{lmn} = A_{1i} \cdot A_{2j} \cdot A_{3k} \cdot \varepsilon_{ijk}$$

$$= A_{11} \cdot (A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12} \cdot (A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13} \cdot (A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31})$$

was genau der Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile entspricht!

Aufgabe 06

a)

$$div\,(\lambda\vec{a}) = \frac{\partial\,(\lambda\vec{a})_i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\lambda a_i)}{\partial x^i} = \frac{\partial\lambda}{\partial x^i}a_i + \lambda\frac{\partial a_i}{\partial x^i} = \vec{a} \cdot grad(\lambda) + \lambda \cdot div\,(\vec{a})$$

b)

$$rot\,(\lambda\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot (\lambda\vec{a})_k \cdot \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial(\lambda a_k)}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{ijk} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^j}a_k + \lambda\frac{\partial a_k}{\partial x^j}\right) \cdot \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{ijk}$$

$$= (grad(\lambda))_j \cdot a_k \cdot \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{ijk} + \lambda \cdot \nabla_j \cdot a_k \cdot \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{ijk} = grad(\lambda) \times \vec{a} + \lambda \cdot \nabla \times \vec{a} = grad(\lambda) \times \vec{a} + \lambda \cdot rot\,(\vec{a})$$

c)

$$grad(UV) = \vec{e}_i \frac{\partial(UV)}{\partial x^i} = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial x^i} V + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial x^i} U = V \cdot gradU + U \cdot gradV$$

d)

$$div\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \frac{\partial\left(a_j \cdot b_k \cdot \varepsilon_{ijk}\right)}{\partial x^i} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \cdot b_k \cdot \varepsilon_{ijk} + \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \cdot a_j \cdot \varepsilon_{ijk} = b_k \cdot \nabla_i \cdot a_j \cdot \varepsilon_{kij} - a_j \cdot \nabla_i \cdot b_k \cdot \varepsilon_{jik}$$

$$= \vec{b} \cdot rot\ \vec{a} - \vec{a} \cdot rot\ \vec{b}$$

e)

$$grad\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial(a_k b_k)}{\partial x^i} = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \cdot b_k + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \cdot a_k = \vec{e}_i \cdot \left[b_k \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_k \frac{\partial b_i}{\partial x^k} + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right]$$

$$= \vec{e}_i \cdot \left[b_k \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_k \frac{\partial b_i}{\partial x^k} + a_j \frac{\partial b_m}{\partial x^l}\left(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}\right) + b_j \frac{\partial a_m}{\partial x^l}\left(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}\right)\right]$$

$$= \left(b_k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \cdot \vec{a} + \left(a_k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \cdot \vec{b} + \vec{e}_i \cdot a_j \left(\frac{\partial}{\partial x^l} b_m \varepsilon_{klm}\right) \varepsilon_{ijk} + \vec{e}_i \cdot b_j \left(\frac{\partial}{\partial x^l} a_m \varepsilon_{klm}\right) \varepsilon_{ijk}$$

$$= (\vec{a} \cdot grad) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \cdot grad) \cdot \vec{b} + \vec{a} \times rot\ \vec{b} + \vec{b} \times rot\ \vec{a}$$

f)

$$rot\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a_l b_m \varepsilon_{klm}\right) \cdot \varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial(a_l b_m)}{\partial x^j} \cdot \left(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}\right) = \vec{e}_i \cdot \left(\frac{\partial(a_i b_j)}{\partial x^j} - \frac{\partial(a_j b_i)}{\partial x^j}\right)$$

$$= \vec{e}_i \cdot \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} b_j + \frac{\partial b_j}{\partial x^j} a_i - \frac{\partial a_j}{\partial x^j} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} a_j\right) = (\vec{b}\ grad)\ \vec{a} - (\vec{a}\ grad)\ \vec{b} + \vec{a}\ div\ \vec{b} - \vec{b}\ div\ \vec{a} \quad \square$$

Für (d) ergibt sich

$$div\left(grad(U) \times grad(V)\right) = grad(V) \cdot rot\ grad(U) - grad(U) \cdot rot\ grad(V) = 0$$

und für (e)

$$grad(a^2) = 2 \cdot (\vec{a}\ grad)\ \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \times rot\ \vec{a} = 2 \cdot a_j \frac{\partial a_i}{x^j} \cdot \vec{e}_i + 2 \cdot \vec{e}_i \cdot \left(a_j \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - a_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right) = 2 \cdot \vec{e}_i \cdot a_j \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$$