

Mathematische Übungen für Physiker II

FSU Jena - SS 2007

6. Mai 2007

Thema 2: Die Symbole von KRONECKER und LEVI-CIVITÁ

Lösen sie alle Aufgaben dieser Übungsserie im Indexkalkül

Aufgabe 1: KRONECKER- und LEVI-CIVITÁ-Symbol

Berechnen Sie

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \delta_{ik}\delta_{kj} & \text{b) } \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}\delta_{im} & \text{c) } \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} \\ \text{d) } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} & \text{e) } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} & \end{array}$$

Aufgabe 2: Die JACOBI-Identität

Bestätigen Sie die JACOBI-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Aufgabe 3: Das Spatprodukt

a) Weisen Sie nach, daß für das Spatprodukt

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

gilt. Was ergibt sich daraus für $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$?

b) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabenteil a), daß

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \mathbf{c} - [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{d}$$

und

$$[\mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \mathbf{c} - [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{d} + [\mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \mathbf{a} - [\mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{a})] \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

gilt. Was resultiert daraus für $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$?

Aufgabe 04: Die LAGRANGE-Identität

Bestätigen Sie die LAGRANGE-Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})$$

Aufgabe 5: Die dreireihige Determinante

Berechnen Sie die Determinante $\det A$ einer dreireihigen Matrix mit den Elementen A_{pq} aus

$$(\det A) \varepsilon_{lmn} = A_{li} A_{mj} A_{nk} \varepsilon_{ijk}$$

indem Sie $l = 1$, $m = 2$ und $n = 3$ wählen und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile.

Aufgabe 6: Vektoroperator-Identitäten

Bestätigen Sie im Index-Kalkül die Identitäten

- a) $\operatorname{div}(\lambda \vec{a}) = \vec{a} \operatorname{grad} \lambda + \lambda \operatorname{div} \vec{a}$
- b) $\operatorname{rot}(\lambda \vec{a}) = (\operatorname{grad} \lambda) \times \vec{a} + \lambda \operatorname{rot} \vec{a}$
- c) $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$
- d) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}$
- e) $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \operatorname{grad}) \vec{a} + (\vec{a} \operatorname{grad}) \vec{b} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a}$
- f) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \operatorname{grad}) \vec{a} - (\vec{a} \operatorname{grad}) \vec{b} + \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a}$

Was resultiert in Aufgabenteil d), wenn $\vec{a} = \operatorname{grad} U$ und $\vec{b} = \operatorname{grad} V$ ist und was in Aufgabenteil e) für $\vec{b} = \vec{a}$?