Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007
Thema 01 - Lösungen

Stilianos Louca

28. April 2007

Aufgabe 1:

a) Unter Berücksichtigung das an dieser Kugelfläche $|\vec{r}| = \sqrt{3}a : const$ und $\vec{r}$ immer senkrecht zu dieser ist, d.h $d\vec{f} = \vec{e}_r \cdot dA$ wobei $\vec{e}_r := \vec{r}/r$, gilt für den Fluss:

$$F = \int_A \vec{\Phi} \cdot d\vec{f} = \int_A \frac{\alpha}{(3a^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}_r \cdot dA = \frac{\alpha}{8a^3} \int_A |\vec{r}| \cdot dA = \frac{\sqrt{3}a\alpha}{8a^3} \int_A dA = \frac{\sqrt{3}a\alpha}{8a^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{3\sqrt{3}\alpha\pi}{2}$$

b)

$$\Phi =: \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; div\vec{\Phi} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\alpha(y^2 + z^2 + a^2 - 2x^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{\alpha(x^2 + z^2 + a^2 - 2y^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{\alpha(x^2 + y^2 + a^2 - 2z^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = \frac{3a^2\alpha}{(r^2 + a^2)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \; F = \int_V div\vec{\Phi} \cdot dV = \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{3a^2\alpha}{(\rho^2 + a^2)^{5/2}} \cdot 4\pi\rho^2 \cdot d\rho \stackrel{*}{=} 12a^2\alpha\pi \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2\gamma \cdot \cos\gamma}{a^2} \cdot d\gamma = 12\alpha\pi \cdot \left[\frac{\sin^3\gamma}{3}\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\alpha\pi}{2}, \quad (*) \; Sub: \; \rho = a\tan\gamma$$

Aufgabe 2

a) Da $\vec{r}$ für $z = 0$ parallel zur XY Ebene liegt, ist dort der Fluss durch die Grundfläche offensichtlich 0! Demzufolge ist der gesamte Fluss F durch die Fläche allein dem Fluss am Rotationsparaboloid zu verdanken. Aufgrund von Symmetrien im Rotationsparaboloid als auch von $\vec{r}$ können wir uns auf den 1-en Oktanten beschränken. Demzufolge:

$$F = \int_A \vec{r} \cdot d\vec{f} = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dx \cdot dy = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x^2 + 2y^2 + a^2 - x^2 - y^2) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} + y^2x + a^2x\right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \cdot dy = 4\int_0^a \left[\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{3/2} + y^2\sqrt{a^2 - y^2} + a^2\sqrt{a^2 - y^2}\right] dy$$

$$Sub: \ y = a\sin\phi \ \rightarrow \ F = 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^4}{3}\cos^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi + a^4\cos^2\phi \right) d\phi$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^4}{24}(\cos 4\phi + 4\cos 2\phi + 3) + \frac{a^4}{8}(1-\cos 4\phi) + a^4\frac{1+\cos 2\phi}{2} \right) d\phi$$

$$= 2\left[\frac{a^4}{12}\left(\frac{\sin 4\phi}{4} + 2\sin 2\phi + 3\phi \right) + \frac{a^4}{4}\left(\phi - \frac{\sin 4\phi}{4} \right) + a^4\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{3a^4\pi}{2}$$

b)

$$R^2 := (x^2+y^2) = (a^2 - z)$$

$$div(\vec{r}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \ \Rightarrow \ F = \int_V div(\vec{r})\cdot dV = 3\int_V dV = 3V = 3\int_0^{z_{max}} R^2\pi\cdot dz = 3\int_0^{a^2} (a^2 - z)\pi\cdot dz$$

$$= 3\pi\left[a^2 z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{a^2} = \frac{3\pi a^4}{2}$$

Aufgabe 3

a)

$$\rho = \varepsilon_0 \cdot div\vec{E} = \frac{Qe^{-kr^2}}{4a^3\pi}\left((1-2x^2k) + (1-2y^2k) + (1-2z^2k) \right) = \frac{Qe^{-kr^2}}{4a^3\pi}(3-2kr^2)$$

b) Die gesamte Ladung $\hat{Q}$ ergibt sich als:

$$\hat{Q} = \int_V \rho\cdot dV = \int_{r=0}^{\infty} \rho\cdot(4\pi r^2\cdot dr) = \frac{Q}{4\pi a^3}\int_0^{\infty} e^{-kr^2}(3-2kr^2)\cdot 4\pi r^2\cdot dr = \frac{Q}{a^3}\left(3\int_0^{\infty} r^2 e^{-kr^2}\cdot dr - 2k\int_0^{\infty} r^4 e^{-kr^2}\cdot dr \right)$$

$$= \frac{Q}{a^3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4k^{3/2}} - \frac{6k\sqrt{\pi}}{8k^{5/2}} \right) = 0$$

c) Unter Berücksichtigung dass das Feld symmetrisch nach außen gerichtet ist, und so immer senkrecht auf die Oberfläche einer Kugel mit den Koordinatenursprung zeigt, d.h $d\vec{f} = \vec{e}_r \cdot dA$, gilt für eine bestimmte Kugel mit dem Radius R:

$$\hat{Q}(R) = \varepsilon_0\int_V div\vec{E}\cdot dV = \varepsilon_0\int_A \vec{E}\cdot d\vec{f} = \frac{Q}{4\pi a^3}\int_A e^{-kr^2}\cdot\vec{r}\cdot\vec{e}_r\cdot dA = \frac{Qe^{-kR^2}R}{4\pi a^3}\int_A dA = \frac{Qe^{-kR^2}R}{4\pi a^3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{QR^3e^{-kR^2}}{a^3}$$

$$\lim_{R\to\infty}\hat{Q}(R) = \lim_{R\to\infty}\frac{QR^3}{a^3e^{kR^2}} \overset{L'H}{=} \lim\frac{3QR^2}{2a^3kRe^{kR^2}} \overset{L'H}{=} \lim\frac{3Q}{4a^3k^2Re^{kR^2}} = 0$$

d) Nein kann man nicht, denn sonst gäbe es innerhalb von endlichen Kugeln eine Masse $M(R) \neq 0$ jedoch für den gesamten Raum keine. Dies kann aber nicht sein da die Masse nicht verschwindet bzw. sich nur addiert. Mit anderen Worten, sie hat nur ein Vorzeichen und kann nur zunehmen!

Aufgabe 4

A (+) , B (-) , C (-) , D (0)