Mathematische Übungen für Physiker II
FSU Jena - SS 2007

16. April 2007

Thema 1: Fluß und Divergenz, der GAUSSsche Satz

Aufgabe 1: Verifikation des GAUSSschen Satzes I

a) Berechnen Sie als Oberflächenintegral den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{\Phi} = \frac{\alpha\vec{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

durch die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $|\vec{r}| = \sqrt{3}a$.

b) Bilden Sie die Diverenz des Vektorfeldes $\vec{\Phi}$ und berechnen Sie den Fluss als Volumenintegral von div $\vec{\Phi}$ über das Innere dieser Kugel. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabenteil a).

Hinweis für die Integration: Substituieren Sie $r = a\tan\gamma$

Aufgabe 2: Verifikation des GAUSSschen Satzes II

a) Berechnen Sie als Oberflächenintegral den Fluss des Ortsvektors $\vec{r}$ durch die geschlossene Fläche, die aus dem Rotationsparaboloid $z = a^2 - x^2 - y^2, (z \geq 0)$ und der Ebene $z = 0$ gebildet wird.

b) Bilden Sie dir Divergenz des Vektorfeldes $\vec{\Phi} = \vec{r}$ und berechnen Sie diesen Fluss noch einmal als Volumenintegral von div $\vec{\Phi}$ über das von diesen beiden Flächen begrenzte Volumen.

Aufgabe 3: Elektrostatisches Feld

Das elektrostatische Feld $\vec{E}$ eine bestimmten Ladungsverteilung sei durch

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} e^{-kr^2}\vec{r}$$

gegeben, worin Q, k und a positive Konstanten sind und ε_0 die elektrische Feldkonstante des Vakuums bedeutet.

a) Berechnen Sie die Dichte $\rho(\vec{r})$ der dieses Feld erzeugenden Ladungsverteilung aus der MAXWELLschen Gleichung

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

b) Berechnen Sie die Gesamtladung durch Integration über den ganzen Raum.
Hinweis: Rechnen Sie in Kugelkoordinaten. Das GAUSSsche Integral

$$\int_0^\infty r^n e^{-kr^2} dr$$

hat für $n = 2$ und $n = 4$ die Werte $\frac{\sqrt{\pi}}{4k^{3/2}}$ bzw. $\frac{3\sqrt{\pi}}{8k^{5/2}}$.

c) Verifizieren Sie das Ergebnis von Aufgabenteil b), indem sie mit Hilfe des GAUSSschen Satzes die in einer Kugel mit dem Radius R eingeschlossene Ladung berechnen und anschließend den Grenzwert für $R \to \infty$ bilden.

d) Zusatzfrage: Die Formeln der Elektrostatik lassen sich in die Gravitostatik durch die Ersetzungen $\vec{E} \to \vec{g}$, $Q \to M$, $\rho \to \mu$ und $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G$ übertragen, so dass eine Massendichte μ gemäß

$$div\ \vec{g} = -4\pi G\mu$$

ein statisches Gravitationsfeld $\vec{g}$ erzeugt. Kann man sich eine Massendichte μ vorstellen, die zu einem Gravitationsfeld führt, das (mit den genannten Ersetzungen) aufgebaut ist wie das in dieser Aufgabe behandelte elektrostatische Feld?

Hinweis: Bei der Beantwortung dieser Frage müssen Sie nichts rechnen. Denken Sie nur über den Unterschied zwischen Elektrizität und Gravitation nach.

Aufgabe 4: Quellen und Senken

Die Abbildung zeigt einige Flusslinien einer ebenen Flüssigkeitsströmung. Es sei $\vec{v}$ das Geschwindigkeitsfeld. Lesen sie durch bloße Betrachtung der Abbildung das Vorzeichen von div $\vec{v}$ an den Punkten A, B, C und D ab.