Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Vektoranalysis

Thema 12: Zirkulation und Rotation, der STOKESsche Satz

Fertigen Sie zu den Aufgaben 2,3 und 4 Skizzen an.

Aufgabe 1: Konservative Kräfte
Eine Kraft $\vec{F}$ wirke auf eine Teilchen am Ort $\vec{r}$. Entscheiden Sie durch Berechnung von $rot\vec{F}$, ob die beiden Kräfte

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a}\left[z\vec{k} + \frac{\left(x^2+y^2-a^2\right)}{a^2}\vec{r}\right]e^{-r^2/a^2}$$

und

$$\vec{F} = F_0\left[\vec{k} + \frac{a(\vec{r}\times\vec{k})}{r^2}\right]$$

als Gradient eines Potentials darstellbar sind oder nicht.

Aufgabe 2: Oberflächen-Berechnung

a) Berechnen Sie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit dem halben öffnungswinkel θ_0 dessen Grundkreis den Radius a hat. Zeigen Sie, daß diese Fläche gleich dem Produkt aus dem halben Umfang des Grundkreises und der Länge der Mandellinie ist.

b) Berechnen Sie die zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = z_0$ eingeschlossene Oberfläche des Rotationsparaboloids

$$z = a(x^2+y^2)$$

Aufgabe 3: Verifikation des STOKESschen Satzes (1)
Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = F_0\left[\left(\frac{y^3}{3a^3} + \frac{y}{a}e^{xy/a^2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{xy^2}{a^3} + \frac{x+y}{a}e^{xy/a^2}\right)\vec{j} + \frac{z}{a}e^{xy/a^2}\vec{k}\right]$$

das Linienintegral

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}$$

mit Hilfe des STOKESschen Satzes. Dabei sei C der Umfang des durch die Punkte $A(0,1,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,3,0)$ und $D(0,3,0)$ gegebenen Rechtecks.
Machen Sie anschließend die Probe, indem Sie das Linienintegral direkt berechnen.

Aufgabe 4: Verifikation des STOKESschen Satzes (2)
Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\vec{i} + (3xy^2z + x^3z + ye^x)\vec{j} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\vec{k}$$

direkt und mit Hilfe des STOKESschen Satzes das Linienintegral

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

wobei die geschlossene Raumkurve durch die nacheinander durchlaufenen Punkte $O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,0,1), C(1,1,1), D(1,1,0), E(0,1,0)$ und $O(0,0,0)$ beschrieben sei.
Hinweis: Ersetzen Sie die Raumkurve durch zwei Rechteckige Integrationswege in den Ebenen z=0 und x=1 und beachten sie deren Durchlaufsinn.