

# Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

## Vektoranalysis

### Thema 11: Der GREENsche Satz

---

#### **Aufgabe 1:** Verifikation des GREENschen Satzes

Bestätigen Sie die Gültigkeit des GREENschen Satzes für die beiden folgenden Beispiele.

a)  $\vec{\Phi} = y(4x^2 + y^2)\vec{i} + x(2x^2 + 3y^2)\vec{j}$ ;  
der geschlossene Weg  $C$  ist die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

b)  $\vec{\Phi} = -3y\vec{i} + 2x\vec{j}$ ;  
der geschlossene Weg  $C$  ist das Quadrat mit den Eckpunkten  $P_1(0, 2)$ ,  $P_2(2, 0)$ ,  $P_3(-2, 0)$  und  $P_4(0, -2)$ .

#### **Aufgabe 2:** Flächeninhalt als Kurvenintegral

Berechnen Sie den Inhalt der von der Astroide

$$x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$$

eingeschlossenen Fläche mit Hilfe eines Kurvenintegrals. Fertigen Sie zunächst nach einer Kurvendiskussion eine Skizze dieser Fläche an.

#### **Aufgabe 3:** Berechnung eines Kurvenintegrals mit dem GREENschen Satz (1)

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = (e^x y + \cos x \sin y)\vec{i} + (e^x + \sin x \cos y)\vec{j}$$

das Integral  $\oint \vec{\Phi} d\vec{r}$ , wobei der geschlossene Weg  $C$  die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ist.

#### **Aufgabe 4:** Berechnung eines Kurvenintegrals mit dem GREENschen Satz (2)

Berechnen Sie mit Hilfe des GREENschen Satzes für das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = e^x \cos y \vec{i} - e^x \sin y \vec{j}$$

das Integral  $\int \vec{\Phi} d\vec{r}$ , wobei der nicht geschlossene Integrationsweg  $C$  vom Punkt  $P_1(\ln 2, 0)$  zum Punkt  $P_2(0, 1)$  und von da zum Punkt  $P_3(-\ln 2, 0)$  verläuft.