

# Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

## Vektoranalysis : Thema 9 : Doppel und Dreifachintegrale

---

**Aufgabe 1:** Das Volumen als Doppelintegral

a) Berechnen sie das Volumen des durch die drei Koordinatenflächen  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  und die Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

begrenzten Tetraeders aus einem Doppelintegral.

b)

- Berechnen sie aus einem Doppelintegral die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Berechnen sie das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sowohl aus einem Doppelintegral als auch nach dem CAVALIERischem Prinzip mit Hilfe der soeben bestimmten Ellipsenfläche.

**Aufgabe 2:** Das Volumen als Dreifachintegral

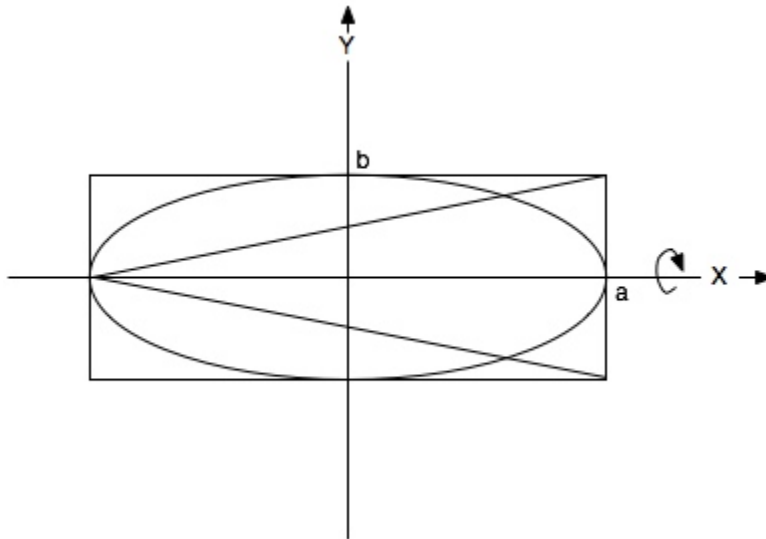
Berechnen sie mit Hilfe eines Dreifachintegrals das Volumen

a) begrenzt durch die Flächen  $y^2 = 4ax$ ,  $x + z = a$  und  $z = 0$ ,

b) zwischen den Flächen  $z = 2x^2 + y^2 + 12$  und  $z = x^2 + y^2 + 8$  über dem Dreieck mit den Eckpunkten  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  und  $(1,2)$ .

### Aufgabe 3: Volumina von Rotationskörpern

Das in der Abbildung dargestellte Rechteck hat die Seitenlänge  $2a$  und  $2b$ . Ihm sind eine Ellipse und ein Dreieck eingeschrieben. Bei Rotation um die  $x$ -Achse entstehen drei Rotationskörper: ein Kegel, ein Ellipsoid und ein Zylinder. Berechnen sie Volumina dieser Rotationskörper und setzen diese zueinander ins Verhältnis.



### Aufgabe 4: Zylinder- und Kugelkoordinaten

a) Berechnen sie in *Zylinderkoordinaten* das Volumen innerhalb des Zylinders  $x^2 + y^2 = 4$  und zwischen der Fläche  $z = 2x^2 + y^2$  und der  $(x, y)$ -Ebene.

b) Berechnen sie in *Kugelkoordinaten* das Volumen innerhalb des Kegels  $3z^2 = x^2 + y^2$ , oberhalb der Ebene  $z = 2$  und innerhalb der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ .