Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Vektoranalysis : Thema 8 : Linienintegrale und Weg(un)abhängigkeit

---

Aufgabe 1: Wegabhängigkeit (1)
Berechnen sie für das Vektorfeld $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ und jeden dr nachfolgend genannten Wege C_1, C_2, C_3, welche die Punkte $P_1(1,1)$ und $P_2(4,2)$ verbinden, das Integral:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$

- C_1 : Parabel $y^2 = x$,
- C_2 : durch $x = 2t^2 + t + 1$ und $y = 1 + t^2$ parametrisierter Weg.
- C_3 : zu den Koordinatenachsen parallele Wegstücke $y = 1$ von P_1 zum Punkt $P(4,1)$ und anschließend $x = 4$ von $P(4,1)$ zu P_2.

Aufgabe 2: Wegabhängigkeit (2)
Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}$$

und der Weg C in der Parameterdarstellung

$$\vec{r} = (a - c + c\cos\theta)\vec{i} + (b + c\sin\theta)\vec{j} + c^2\theta\vec{k} \quad mit \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

a) Beschreiben sie Gestalt und Lage dieses Integrationsweges.

b) Berechnen sie das Integral

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

Darf man aus dem Ergebnis schließen, das das Vektorfeld $\vec{F}$ konservativ ist?

c) Prüfen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{F}$ konservativ ist.

Aufgabe 3: Geschlossener Integrationsweg

a) Prüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$\vec{F} = y(4x^2 + y^2)\vec{i} + x(2x^2 + 3y^2)\vec{j}$$

konservativ ist.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

nachdem Sie den Integrationsweg C, der die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sein soll, in geeigneter Weise parametrisiert haben.

Aufgabe 4: Potentialberechnung

a) Weisen Sie nach, daß das Vektorfeld

$$\vec{F} = -\frac{zx}{r^3}\vec{i} - \frac{zy}{r^3}\vec{j} + \frac{x^2 + y^2}{r^3}\vec{k} \;\; mit \;\; r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

konservativ ist.

b) Berechnen Sie eine skalare Potentialfunktion $U(\vec{r})$, so daß $\vec{F} = -\text{grad } U$ gilt, nach zwei Verfahren, nämlich

- indem Sie die Gleichungen

  $$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_1, \; \frac{\partial U}{\partial y} = -F_2 \; und \; \frac{\partial U}{\partial z} = -F_3$$

  nacheinander integrieren,

- indem Sie das Linienintegral

  $$U = -\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

  berechnen, wobei der Integrationsweg vom Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ zum Punkt $P(x, y, z)$ stückweise parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen soll.

Stimmen die Ergebnisse nach beiden Verfahren überein?
Machen Sie die Probe durch Gradientenbildung von U.