Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen : Thema 7 : Abschließende Übungen

---

Aufgabe 1: Die BERNOULLI-Gleichung
Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \ (n \neq 0, 1)$$

heißt BERNOULLISCHE Differentialgleichung.

a) Zeigen Sie, daß man diese Gleichung mit der Substitution $v = y^{1-n}$ in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

überführen kann.

b) Lösen Sie nach diesem Verfahren die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2x^3y^4$$

und machen Sie anschließend die Probe.

Aufgabe 2: Die RICCATI-Gleichung
Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

heißt RICCATIsche Differentialgleichung.

a) Zeigen Sie: ist eine Partikulärlösung y_p einmal bekannt, führt die Substitution $y = y_p + \frac{1}{u}$ auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} + (g + 2fy_p)u = -f$$

für u.

b) Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}y^2 + y - e^x,$$

indem Sie sich zuerst davon überzeugen, daß $y_p = e^x$ eine Partikulärlösung ist und machen Sie anschließend die Probe.

Aufgabe 3: Ein System vonDifferentialgleichungen
Die beiden Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ erfüllen das System

$$\dot{x} - 2y = -\sin t \quad \text{und} \quad \dot{y} + 2x = 4\cos t$$

von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.
Bestimmen Sie $x(t)$ und $y(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 3$ und $y(0) = 2$ und skizzieren Sie die Lösungskurve in der (x, y)-Ebene für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Hinweis: Differenzieren Sie eine der beiden Gleichungen nach t und setzten Sie die andere Gleichung in die so entstehende Differentialgleichung zweiter Ordnung ein.