

Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Thema 6: Die lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 1: Methodenvergleich

Bestimmen sie die allgemeine Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$i) y'' + y' - 2y = 4 \sin 2x$$

$$ii) y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$$

auf drei verschiedenen Wegen, nämlich

- durch Lösung jeweils zweier Differentialgleichungen erster Ordnung
- durch Variation der Konstanten
- mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten

Zeigen Sie, daß die so gefundenen Lösungen übereinstimmen und machen Sie die Probe durch Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung.

Aufgabe 2: Anfangsbedingungen

a) Die Funktion $f(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 8 \frac{df}{dt} + 12f = 12e^{-4t}$$

Lösen Sie diese Gleichung mit einer Methode Ihrer Wahl und stellen Sie fest, für welchen der beiden Sätze von *drei* Bedingungen die Lösung existieren kann:

$$i) f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0, f(\ln \sqrt{2}) = 0$$

$$ii) f(0) = 0, \dot{f}(0) = -2, f(\ln \sqrt{2}) = 0$$

b) Eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2 \frac{df}{dt} + f = 4e^{-t}$$

nimmt für $t = 0$ den Wert 1 und für $t = 1$ den Wert $\frac{1}{e}$ an. Wie groß muß die Anfangs-„Geschwindigkeit“ $\dot{f}(0)$ sein, damit die zweite der beiden Bedingungen gestellt werden kann? Wie groß ist $f(2)$?

Aufgabe 3: Superpositionsprinzip

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = x^3 - 1 + 2 \cos x$$

und machen Sie anschließend die Probe.