Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Thema 5: Freie ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen

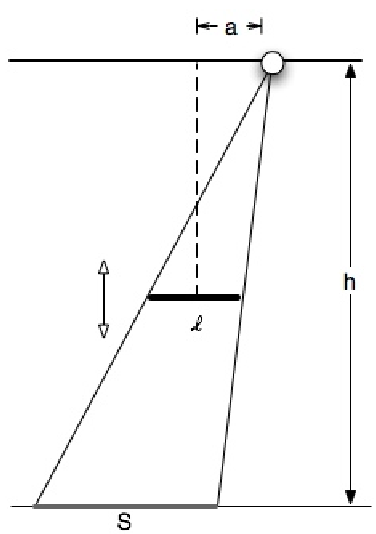
Aufgabe 1: Freie ungedämpfte Schwingungen (I)

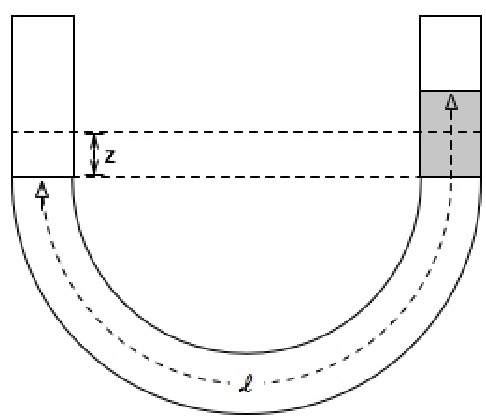
a) Eine Stange der Länge l ist horizontal an einer Feder aufgehängt, die in der Höhe h über dem Boden befestigt ist. In der Ruhelage befinde sich die Stange genau in halber Höhe. Wird die Stange um z_0 aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, schwingt sie mit der Frequenz ω. Im Abstand a vom Aufhängepunkt der Feder befinde sich an der Decke eine punktförmig gedachte Lichtquelle.

Zu welcher Zeit hat der Schatten der auf und ab schwingenden Stange seine größte und kleinste Länge und wie groß sind diese extremalen Schattenlängen? Wie schnell ändert der Schatten seine Länge, wenn die Stange durch ihre Ruhelage hindurchgeht?

b) Wird in ein U-Rohr mit konstantem Querschnitt A eine Flüssigkeit der Dichte μ eingebracht, stellt sich im Gleichgewicht eine U-förmige Flüssigkeitssäule der Länge l ein. Wird die Flüssigkeitssäule um die Strecke z verschoben, bewirkt das Gewicht der überstehenden Flüssigkeit eine rücktreibende Kraft, mit der die gesamte Flüssigkeit beschleunigt wird.

Stellen Sie die Schwingungsgleichung für dieses Flüssigkeitspendel auf und bestimmen Sie die Schwingungsdauer. Welche Länge muß ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer haben?





Aufgabe 2: Freie ungedämpfte Schwingungen (II)

a) Die Gravitationsanziehung auf ein Teilchen der Masse m, das sich innerhalb der Erde (Erdradius R) im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindet, ist $F = -mg\frac{r}{R}$.

   Zeigen Sie, daß das Teilchen in einem Kanal, der durch den Erdmittelpunkt verläuft, eine einfache harmonische Bewegung ausführen würde. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer und vergleichen Sie diese mit der Umlaufzeit eines Erdsatelliten auf einer Kreisbahn vom Radius R.

b) Stellen Sie die Differentialgleichung für einen im homogenen Schwerefeld vertikal aufgehängten Federschwinger auf, wobei die Schwerkraft berücksichtigt, Reibung jedoch vernachlässigt werden soll.

   Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe einer Koordinatentransformation $z = z' + z_0$, in der Sie z_0 so bestimmen, daß z' die Schwingungsgleichung für einen Federschwinger erfüllt, bei dem die Schwerkraft nicht berücksichtigt wird. Beschreiben Sie aufgrund Ihrer Lösung, wie sich die Schwerkraft auf das Schwingungsverhalten des Federschwingers auswirkt.

Aufgabe 3: Freie edm̈pfte Schwingungen

a) Die Funktion $y(t)$ sei eine Lösung der Differenzialgleichung

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

   worin $a > 0$ und $b^2 - 4ac < 0$ ist. Zeigen Sie, daß

$$w(t) = e^{\frac{t}{\tau}}y(t)$$

   die Schwingungsgleichung für einen ungedämpften harmonischen Oszillator erfüllt, wenn man den Parameter τ geeignet wählt. Geben Sie die Frequenz Ω dieser Schwingung an. Vergleichen Sie das Resultat mit der Ihnen bekannten Lösung für freie, unterkritisch gedämpfte Schwingungen.

b) Am Ende einer vertikalen Feder ist die Masse m_1 angehängt. Durch Anhängen einer zusätzlichen Masse m_2 verlängert sich die Feder um die Strecke s. Beschreiben Sie mit den sich aus der Aufgabe ergebenden Anfangsbedingungen die Schwingung, die die erste Masse ausführt, wenn die zweite Masse herunterfällt, und berücksichtigen Sie dabei einen geschwindigkeitsproportionalen, unterkritischen Reibungswiderstand. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer.

Aufgabe 4: Kleine Schwingungen

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich eindimensional unter dem Einfluß der Kraft

$$F(x) = -kx + \frac{a}{x^3};\ a > 0$$

   Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilität, und berechnen Sie gegebenenfalls die Frequenzen kleiner Schwingungen um die stabilen Gleichgewichtslagen.

b) Lösen Sie diese Aufgabe noch einmal für die Kraft

$$F(x) = -2V_0x(1 - ax^2)e^{-ax^2};\ V_0 > 0,\ a > 0$$