Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Thema 4: Die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

Aufgabe 1: Die charakteristische Gleichung
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen dr nachfolgend genannten Differentialgleichungen sowie die speziellen Lösungen, die die nebenstehenden Anfangsbedingungen erfüllen.

$$i)\ 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$
$$ii)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0;\ y(0) = y_0,\ y'(0) = 0$$
$$iii)\ 4\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer allgemeinen Lösungen durch Einsetzten in die jeweilige Differentialgleichung.

Aufabe 2: Die WRONSKI-Determinante
Zeigen Sie durch Berechnung der WRONSKI-Determinante, daß die beiden Paare von Funktionen

$$i)\ y_1 = \sin\beta x,\ y_2 = \cos\beta x$$
$$ii)\ y_1 = e^{ax},\ y_2 = xe^{x}$$

jeweils ein Fundamentalsystem bilden und bestimmen Sie die beiden Differentialgleichungen, deren Lösungen diese Funktionenpaare sind.

Aufgabe 3: Differentialgleichungen mit komplexen Koeffizienten Bei den Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten sind die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung zueinander konjugiert-komplex, wenn sie überhaupt komplex sind. Dies gilt nicht mehr, wenn die Differentialgleichung wie in den beiden Beispielen

$$i)\ \frac{d^2y}{dx^2} + (1+2i)\frac{dy}{dx} + (i-1)y = 0$$
$$ii)\ \frac{d^2y}{dx^2} + (1-i)\frac{dy}{dx} - iy = 0$$

komplexe Koeffizienten hat.

Zeigen Sie, daß das auf den Eponentialansatz gegründede Lösungsverfahren auch mit komplexen Koeffizienten durchführbar ist, indem Sie beide Differentialgleichungen mit einem solchen Ansatz lösen und anschließend die Probe machen.

Aufgabe 4: Kleine Schwingungen

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich eindimensional unter dem Einfluß der Kraft

$$F(x) = -kx + \frac{a}{x^3};\ a > 0$$

Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilität, und berechnen Sie gegebenenfalls die Frequenzen kleiner Schwingungen um die stabilen Gleichgewichtslagen.

b) Lösen Sie diese Aufgabe noch einmal für die Kraft

$$F(x) = -2V_0 x(1 - ax^2)e^{-ax^2};\ V_0 > 0,\ a > 0$$