Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Thema 3: Exakte Differentialgleichungen. Der integrierende Faktor

---

Aufgabe 1: Exakte und nicht exakte Differentialgleichungen
Weisen sie nach, daß die erste der nachfolgenden Differentialgleichungen exakt ist, die beiden anderen jedoch nicht. Lösen sie alle drei Differentialgleichungen zumindest in impliziter Form, nachdem Sie für die beiden nicht exakten Gleichungen jeweils einen nur von der Variablen x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda(x)$ bestimmt haben.

$$\begin{aligned} &i)\ y(2x^2y^2+1)y' + x(y^4+1) = 0 \\ &ii)\ 2xy' + 3x + y = 0 \\ &iii)\ (\cos^2 x + y\sin 2x)y' + y^2 = 0 \end{aligned}$$

Überprüfen sie durch Einsetzten in die jeweilige Differentialgleichung die Richtigkeit Ihre Lösung.

Hinweis zu (iii): Es ist $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Aufgabe 2: Eine exakte Differentialgleichung
Bestimmen Sie in der Differentialgleichung

$$\left(xy^\beta + 1\right) y' + \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{\alpha}{y}\right) = 0$$

die Koeffizienten α und β so, daß die Gleichung exakt wird. Lößen Sie anschließend die Gleichung und machen Sie die Probe.

Aufgabe 3: Nichteindeutigkeit des integrierenden Faktors

a) Weisen Sie nach, daß die Differentialgleichung
$$xy' - y = 0$$
nicht exakt ist.

b) Bestimmen Sie einen nur von der Variablen x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda(x)$ und lösen Sie mit seiner Hilfe die Gleichung.

c) Zeigen Sie, daß auch der Faktor
$$\mu(x,y) = \frac{A}{x^2+y^2}\ mit\ A = const$$
ein integrierender Faktor ist. Lösen Sie die Differentialgleichung mit diesem Faktor. Stimmen die Resultate überein?