Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Thema 2: Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1: Die Methode der Variation der Konstanten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Variation der Konstanten und arbeiten Sie die "Anfangs"-Bedingungen ein, sofern diese gegeben sind:

$$i) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1, \quad y(1) = 1$$

$$ii) \frac{dy}{dx} - y \tan x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

$$iii) \sin x \frac{dy}{dx} + 2y \cos x = 1$$

$$iv) \frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$$

Machen Sie in jedem Fall die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösungen in die jeweilige Differentialgleichung.

Aufgabe 2: Orthogonaltrajektorien

Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu der implizit gegebenen Kurvenschar

$$x = y + 1 + Ce^y, \quad C = \text{const}$$

Aufgabe 3: Sinken in einer zähen Flüssigkeit

Ein Körper der Masse m sinkt unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer Flüssigkeit, deren Zähigkeit abnimmt, so daß die Reibungskraft durch

$$F_R = -2m \frac{v}{t + t_0}, \quad t_0 = \text{const}$$

gegeben ist.

- Stellen Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit v des Körpers auf und finden Sie deren allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.
- Die Sinkbewegung des Körpers beginne zur Zeit $t = 0$ aus dem Ruhezustand an der Oberfläche der Flüssigkeit. Berechnen sie mit diesen Anfangsbedingungen die Geschwindigkeit v und den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit. Wie groß sind Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg zur Zeit t_0 ?