Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Thema 1: Separable Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Die Methode der Variablentrennung Lösen Sie die nachfolgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen und bestimmen Sie in der allgemeinen Lösung die Integrationskonstante so, daß die nebenstehenden Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$i)\ x\frac{dy}{dx} = y \qquad\qquad y(2) = 3$$

$$ii)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 + x}{x^2y - y} \qquad\qquad y(\sqrt{2}) = 0$$

$$iii)\ (1+y)\frac{dy}{dx} = y \qquad\qquad y(1) = 1$$

Machen Sie in allen Fällen die Probe durch Einsetzten Ihrer Lösungen in die jeweilige Differentialgleichung.

Aufgabe 2: Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorien
In Aufgabe 5/5 des Vorkurses haben wir die Isothermen $xy - x = T_0$ betrachtet.

a) Überführen sie diese Gleichung der Isothermen durch eine Translation des Koordinatensystems und eine anschleißende Drehung um den Winkel $\phi = \frac{\pi}{4}$ in die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

b) Geben Sie die Differentialgleichung an, der diese Isothermen genügen, zeichnen Sie deren Richtungsfeld und eine Isothermen.

c) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Flußlinien als den zu diesen Isothermen gehöredenden Orthogonaltrajektorien auf, lösen sie diese und zeichnen Sie einige dieser Flußlinien in Ihre Skize ein.

Aufgabe 3: Homogene Differentialgleichungen
Differentialgleichungen heißen *homogen*, wenn man sie in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

aufschreiben kann. Mit Hilfe der Substitution $u = \frac{y}{x}$ lassen sie sich in Differentialgleichungen überführen, die in den Variablen x und u separabel sind. Bestimmen Sie auf diese Weise die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

$$xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \ \mathit{und}\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}$$

Setzen Sie zur Probe die Lösungen in die ursprünglichen Differentialgleichungen ein.

Aufgabe 4: Parabolspiegel

Bestimmen Sie die Gestalt eines Spiegels, der die Eigenschaft hat, daß Strahlen, die parallel zu seiner Symmetrieachse einfallen, sämtlich in einen Punkt F auf dieser Achse reflektiert werden. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor (siehe Abbildung):

a) Wählen Sie den Punkt F als Ursprung des Koordinatensystems und zeigen Sie, daß $\tan 2\theta = \frac{y}{x}$ ist. Stellen Sie dann mit Hilfe der Beziehung

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

die Differentialgleichung

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

auf, aus der sich die Form des Spiegels bestimmen läßt.

b) Führen Sie über $y^2 = r^2 - x^2$ die ebenfalls von x abhängige Variable r anstelle von y ein und lösen Sie die so entstehende, sehr viel einfachere Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Integrationskonstante aus den Koordinaten des Scheitelpunktes S und interpretieren Sie das Resultat geometrisch.