# Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

**Thema 10:** Klausurvorbereitung

---

## Aufgabenkomplex: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

**Aufgabe 1:** Trennung der Variablen (4 Punkte)
Bestimmen Sie durch Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = (2y+1)\cot x$$

sowie deren spezielle Lösung die den Anfangsbedingungen $x_0 = \frac{\pi}{4}$ und $y_0 = \frac{1}{2}$ genügt.
Hinweis: Substitutionsregel

**Aufgabe 2:** Variation der Konstanten (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' - \frac{3y}{x} = x$$

durch Variation der Konstanten.

**Aufgabe 3:** Exakte Differenzialgleichungen (5 Punkte)

a) Entscheiden Sie, welche der beiden Differenzialgleichungen

$$(2x-3)y' + (3x^2+2y) = 0 \quad \textit{und} \quad (xy-1)y' + y^2 = 0$$

exakt ist.

b) Bestimmen Sie für die nicht exakte Differenzialgleichung einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$, der nur von der Variablen $y$ abhängt.

**Aufgabe 4:** Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$n^3y'' - 4ny = 8, \ (n \neq 0)$$

mit konstanten Koeffizienten, indem Sie für die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

## Aufgabenkomplex: Vektoranalysis

**Aufgabe 5:** Kurvenintegral (3 Punkte)
Es sei $C$ die gerade Linie, die die Punkte $P_1(1,0,0)$ und $P_2(0,0,3)$ verbindet.
Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{\Phi} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + \vec{k}$ das Integral

$$\int_C \vec{\Phi} d\vec{r}$$

**Aufgabe 6:** GREENscher Satzt (3 Punkte)
Der Vektor $\vec{\Phi} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ sei parallel zum Tangentenvektor einer geschlossenen Kurve $C$, welche die Randkurve des Gebietes $G$ ist.

a) Zeigen Sie, daß der Vektor $Q\vec{i} - P\vec{j}$ auf diesem Tangentenvektor senkrecht steht.

b) Zeigen Sie, daß

$$\int\int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

ist.

**Aufgabe 7:** Rotation und Divergenz, Integralsätze (6 Punkte)

a) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = y\vec{i} - x\vec{j} + zx^3y^2\vec{k}$$

Rotation und Divergenz.

b) Berechnen Sie den Fluß des Vektors rot$\vec{\Phi}$ durch den *unterhalb* der $(x,y)$-Ebene liegenden Teil der Einheitskugel.

Hinweis: Lösen Sie die Teilaufgabe b) unter Verwendung der Integralsätze auf möglichst einfache Weise.

**Aufgabe 8:** Potentialberechnung (4 Punkte)
Entscheiden Sie, welches der beiden Vektorfelder

$$\vec{\Phi}_1 = 2xy\vec{i} + (x^2+z^2)\vec{j} + y\vec{k} \quad und \quad \vec{\Phi}_2 = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xye^{yz}\vec{k}$$

konservativ ist und bestimmen Sie für das konservative Feld eine skalare Funktion $U(x,y,z)$, als deren Gradient dieses Feld darstellbar ist.