# Mathematische Übungen für Physiker : 1es Semester

FSU Jena - Winter 2006/2007

**Thema 14:** Abschlußklausur

Ohne Hilfsmittel - Zeit : 2 Stunden

---

**Aufgabenkomplex 1: Gewöhnliche Differenzialgleichungen**

**Aufgabe 1:** Trennung der Variablen (3 Punkte)
Betimmen Sie durch Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{dr}{d\phi} + r \tan \phi = 0$$

sowie deren speziellen Lösung, die den Anfangsbedingungen $\phi_0 = \pi$ und $r_0 = 2$ genügt.

**Aufgabe 2:** Variation der Konstanten (5 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$t \frac{ds}{dt} - 2s = t^3 \ln t$$

durch Variation der Konstanten.
Hinweis: Partielle Integration.

**Aufgabe 3:** Exakte Differenzialgleichungen (6 Punkte)

a) Prüfen Sie jede der beiden Differenzialgleichungen

$$(x^3 e^y - 1) \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^y = 0 \quad und \quad y \frac{dy}{dx} + (e^{2x} - y^2) = 0$$

auf Exaktheit.

b) Lösen Sie die exakte Differenzialgleichung in der Form $U(x, y)$=const und bestimmen Sie für die nicht exakte Differenzialgleichung einen nur von der Variablen $x$ abhängigen integrierenden Faktor $\lambda(x)$. (Die Lösung der nicht exakten Differenzialgleichung mit Hilfe dieses integrierenden Faktors wird nicht verlangt.)

**Aufgabe 4:** Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung (5 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2 x = 5k^2 \sin kt$$

mit konstanten Koeffizienten, indem Sie für die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

**Aufgabenkomplex 2: Vektoranalysis**

**Aufgabe 5:** Flächenberechnung mit Hilfe eines Doppelintegrals (5 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe eines Doppelintegrals den Inhalt der Fläche, die durch die Kurven

$$xy = 4,\ y = x \ \ \mathit{und} \ \ x = 4$$

begrenzt wird. Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Skizzieren Sie das Gebiet, dessen Fläche durch das Integral

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$$

ausgedrückt wird. (Die Ausrechnung des Integrals wird nicht verlangt.)

**Aufgabe 6:** Kurvenintegral (4 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C [y dx + (2x + y) dy]$$

als Kurvenintegral längst des Weges $C$, der das durch $y = x^2$ und $y = 4$ begrenzte Gebiet umschließt. Tragen Sie in eine Skizze dieses Integrationsweges auch dessen Durchlaufsinn ein.

**Aufgabe 7:** GREENscher Satz (3 Punkte)
Berechnen Sie unter Verwendung des GREENschen Satzes das Integral

$$\oint_C \left[y^2 dx + (x + y)^2 dy\right]$$

längst des Umfangs des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(a, 0), B(a, a)$ und $C(0, a)$.

**Aufgabe 8:** Potentialberechnung (4 Punkte + 3 Zusatzpunkte)
Das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

ist konservativ.

a) Bestimmen Sie durch Integration längst eines stückweise zu den Koordinatenachsen parallel verlaufenden Weges, der die Punkte $P(x_0, y_0, z_0)$ und $P(x, y, z)$ verbindet, die skalare Funktion $U(x, y, z)$ als deren Gradient das Feld $\vec{\Phi}$ darstellbar ist. (Geben Sie diesen Rechenweg auch dann an, wenn Sie - was in diesem Fall besonders einfach ist - die Funktion $U(x, y, z)$ bereits "erraten" haben.)

b) **Zusatzaufgabe:** Begründen Sie mit Hilfe des STOKESschen Satzes durch Berechnung von rot$\vec{\Phi}$, daß das gegebene Vektorfeld $\vec{\Phi}$ konservativ ist.