Übung zu Mathematische Methoden der Physik
Sommersemester 2009

Abgabetermin: 05.06.09

16. Orthogonale Eigenfunktionen (3 Punkte)

Eine Funktion $f(x)$ sei als eine Summe von orthogonalen Eigenfunktionen gegeben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Zerlegung von $f(x)$ für einen gegebenen Satz von $\varphi_n(x)$ eindeutig ist. Die $\varphi_n(x)$ sind Basisvektoren eines unendlich dimensionalen Hilbert-Raumes.

17. Endliche Reihen (4 Punkte)

Eine Funktion $F(x)$ sei gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)w(x)\mathrm{d}x \ .$$

Die $\varphi_n(x)$ sind wieder ein Satz von orthogonalen Funktionen. Zeigen Sie, dass bei der Verwendung eine endlichen Serie

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi_n(x)$$

als Näherung für $F(x)$ der mittlerere quadratische Fehler

$$\int_a^b \left(F(x) - \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi_n(x) \right)^2 w(x)\mathrm{d}x$$

für $c_n = a_n$ minimal ist.

18. Ungleichung von Schwarz (4 Punkte)

Der hermitesche Operator $\mathcal{H}$ sei positiv definit, also

$$\int_a^b f^* \mathcal{H} f \ \mathrm{d}x > 0 \ .$$

Zeigen Sie, dass die verallgemeinerte Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^b f^* \mathcal{H} g \ \mathrm{d}x \right|^2 \leq \int_a^b f^* \mathcal{H} f \ \mathrm{d}x \int_a^b g^* \mathcal{H} g \ \mathrm{d}x$$

gilt.

19. Dichtematrix (4 Punkte)

Eine normierte Wellenfunktion $\psi(x)$ sei gegeben durch

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \ .$$

Die Koeffizienten a_n sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden. ρ sei die Dichtematrix mit den Elementen $\rho_{ij} = a_i a_j^*$. Zeigen Sie, dass

$$(\rho^2)_{ij} = \rho_{ij} \qquad \text{oder} \qquad (\rho^2) = \rho$$

gilt. Das Ergebnis macht ρ zu einem Projektionsoperator.