

Übung zu Mathematische Methoden der Physik Sommersemester 2009

Abgabetermin: 25.05.09

12. Chebyshev Gleichung (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Chebyshev Gleichung (Typ I)

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

in eine selbst-adjungierte Form gebracht werden kann, indem man sie mit $1/\sqrt{1-x^2}$ multipliziert. Dies ergibt für die Dichtefunktion $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. (In der Vorlesung wird die Dichtefunktion weighting function genannt.)

13. Adjungierter Operator (2 Punkte)

Gegeben sei $\mathcal{L}u = 0$ wobei $g\mathcal{L}u$ selbstadjungiert sei. Zeigen Sie, dass für den adjungierten Operator $\mathcal{L}^\dagger$ gilt: $\mathcal{L}^\dagger(gu) = 0$.

14. Hermitescher Operator (2 Punkte)

Ein Operator ist hermitesch, wenn gilt:

$$\int \psi_1^* \mathcal{L} \psi_2 \, dV = \int (\mathcal{L} \psi_1)^* \psi_2 \, dV .$$

Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei hermiten Operatoren hermitesch ist, genau dann, wenn die zwei Operatoren kommutieren.

15. Chebyshev Polynome (5 Punkte)

Die Chebyshev Polynome $U_n(x)$ (Typ II) erfüllen die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0 .$$

- a) Bestimmen Sie die singulären Punkte für $x \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, ob sie regulär oder irregulär sind.
- b) Bringen Sie die Gleichung in selbstadjungierte Form.
- c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte.
- d) Bestimmen Sie die Dichtefunktion.