Übung zu Mathematische Methoden der Physik
Sommersemester 2009

Abgabetermin: 04.05.09

5. Bessel Differentialgleichung (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

mit dem Separationsansatz

$$\psi(\rho,\varphi,z)=P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

zur Bessel Gleichung

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)+(n^2\rho^2-m^2)P=0$$

vereinfachen lässt.

6. Singularitäten (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre Gleichung

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

drei reguläre Singularitäten bei $x=-1,1$ und ∞ hat.

7. Legendre Gleichung (5 Punkte)

Lösen Sie die Legendre Gleichung aus Aufgabe 6 durch direkte Substitution mit einer Potenzreihe

$$y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}\ .$$

a) Zeigen Sie, dass $k(k-1)=0$ gilt.

b) Benutzen Sie $k=0$ mit $a_1=0$ und berechnen Sie damit eine Bedingung für die geraden Koeffizienten a_λ $(\lambda=0,2,4...)$.

Hinweis: Die Bedingung für a_λ kann in der Form

$$a_{\lambda+2}=f(\lambda,n)a_\lambda$$

geschrieben werden.