

Übung zu Mathematische Methoden der Physik Sommersemester 2009

Abgabetermin: 27.04.09

1. Lineare Operatoren (4 Punkte)

Gegeben sei ein linearer Operator

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

mit der charakteristischen Gleichung $\mathcal{L}\psi = 0$.

Zeige Sie, dass der Differential-Operator \mathcal{L} in kanonischen Koordinaten in eine kanonische Form überführt werden kann.

2. Korteweg - deVries Gleichung (4 Punkte)

Gegeben sei die Korteweg - deVries Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 .$$

Integrieren sie diese Gleichung direkt, wobei angenommen werden kann, dass die Lösung eine sich bewegendes Welle mit $\psi(\chi = x - ct)$ ist.

3. Schwingkreis (2 Punkte)

Bei einem Schwingkreis gilt die Gleichung

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 .$$

Berechnen Sie $I(t)$ für konstante R und C .

4. Radioaktiver Zerfall (3 Punkte)

Für den Zerfall von radioaktiven Stoffen gilt

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N ,$$

wobei N die Konzentration und λ die Zerfallskonstante ist. In einer Serie von n radioaktiven Stoffen, in der N_1 der Ausgangsstoff ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 , \text{ usw.} \end{aligned}$$

Berechnen Sie $N_2(t)$ für die Anfangsbedingung $N_1(0) = N_0$ und $N_2(0) = 0$.