Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

2. Dezember 2008

Aufgabe 03

a) Sei $\omega \in \Lambda^1 S^2$ mit $d\omega = 0$. Zu zeigen wäre: Die Abbildung

$$\int\limits_{\substack{\gamma:[0,1]\to S^2 \\ \gamma(0)=x_0 \\ \gamma(1)=x}} \omega$$

ist Wegunabhängig.
Beweis: Es seien γ_0, γ_1 zwei beliebige Kurven auf S^2 von x_0 nach x. Betrachten die stereographische Projektion S der Kugel von P nach $\mathbb{R}^2$, mit $P \notin \gamma_0 \cup \gamma_1$. O.B.d.A sei P der *Nordpol*, so dass wir erhalten

$$S(x,y,z) = \frac{2}{1-z}(x,y)$$

Da S ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir nach Poincaré

$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{S\circ\gamma_0} \left(S^{-1}\right)^* \omega \overset{\text{Poincare}}{=} \int\limits_{S\circ\gamma_1} \left(S^{-1}\right)^* \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega$$

□

b) Betrachten den Torus als $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, das heißt als Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$, definiert durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;\; :\Leftrightarrow \;\; (x_1 - y_1, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Mit

$$T_{n,m}(x,y) := (x+n, y+m)$$

ist $dT = \mathrm{Id}$ und somit

$$T^*_{n,m} dx = dx$$

denn

$$T^*_{n,m} dx(\xi) = dx(dT_{n,m}(\xi)) = dx(\xi)$$

Betrachten also o.B.d.A im Standard-Koordinatensystem. Obwohl $ddx = 0$ ist, verschwindet für die geschlossene Kurve

$$\gamma(t) := \left(t, \frac{1}{2}\right) \;,\; t \in [0,1]$$

das Integral nicht:

$$\oint\limits_{\gamma} dx = \int\limits_0^t dx\left(\dot\gamma(t)\right)\; dt = \int\limits_0^1 dt = 1$$

Bemerke:

- Zu erkennen ist dass kein glattes Feld $f \in \mathcal{F}(T^2)$ existiert mit $df = dx$. Beachte: die Koordinaten x^i auf T^2 sind keine glatten Felder auf T^2 (Sprungstellen)!
- Somit ist insbesondere T^2 nicht diffeomorph zu S^2, denn gäbe es einen Diffeomorphismus $\psi : S^2 \to T^2$, so wäre

$$\oint_\gamma dx = \oint_{S^{-1}\circ\gamma} S^* dx \overset{\text{Teil (a)}}{=} 0$$