

# Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

2. Dezember 2008

## Aufgabe 01

Betrachten den  $\mathbb{R}^3$  als Mannigfaltigkeit ausgestattet mit der Standard-Karte  $(\text{Id}, x^i)$ .

Der Integrant  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$  entspricht 2-Form  $\omega_F$  definiert durch

$$\begin{aligned}\omega_F(\xi, \eta) &= \langle \mathbf{F}, \xi \times \eta \rangle = F^1 (\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2) + F^2 (\xi^3 \eta^1 - \xi^1 \eta^3) + F^3 (\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \\ &= (F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2) (\xi, \eta)\end{aligned}$$

Beginnend mit dem 3-Simplex

$$\sigma = (D := [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi), \zeta : D \rightarrow B_1(0), \text{std}) \quad , \quad \zeta(y) := \begin{pmatrix} y^1 \cos y^2 \sin y^3 \\ y^1 \sin y^2 \sin y^3 \\ \cos y^3 \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$\begin{aligned}\int_{S^2=\partial B_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS &\cong \int_{\partial\sigma} \omega_F \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\sigma} d(\omega_F) = \int_{\sigma} d(F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2) \\ &= \int_{\sigma} \left[ \frac{\partial F^1}{\partial x^i} \underbrace{dx^i \wedge dx^2 \wedge dx^3}_0 + \frac{\partial F^2}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial F^3}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right] \\ &\quad \text{für } i \in \{2, 3\} \\ &= \int_{\sigma} \underbrace{\left[ \frac{\partial F^1}{\partial x^i} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \right]}_{\text{div } F \in \mathcal{F}(B_1)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_D \zeta^* \text{div } F dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \int_D (\text{div } F) \circ \zeta \underbrace{\det \left( \frac{\partial \zeta^i}{\partial y^j} \right)}_{y^{12} \sin y^2} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_D (2 + 2y^1 \sin y^3 \sin y^2 + 2y^1 \cos y^2) \cdot y^{12} \sin y^2 dy^1 dy^2 dy^3 = \frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

## Aufgabe 02

Der Integrant

$$\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \cong \langle \varphi \cdot \text{grad } \psi, \mathbf{n} \rangle dS$$

kann analog zu Aufgabe 01 interpretiert werden als die 2-Form  $\omega \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\omega = \underbrace{\omega_{\varphi \text{ grad } \psi}}_{\substack{\text{vgl.} \\ \text{Aufgabe 01}}}$$

so dass auch hier für geeigneten 3-Simplex  $\sigma = (D, \psi : D \rightarrow \Omega, \text{std})$  gilt

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \cong \int_{\partial\sigma} \omega_{\varphi \text{grad } \psi} \stackrel{(01)}{=} \int_D \left[ \underbrace{\text{div}(\varphi \text{grad } \psi)}_{\langle \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi \rangle + \varphi \Delta \psi} \circ \psi \right] \det \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y^j} \right) dy^1 dy^2 dy^3 \quad (1)$$

a) Verwenden hier den 3-Simplex

$$\sigma = (D := [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, \pi], \zeta : D \rightarrow S, \text{std}) \quad \text{mit} \quad \zeta : \text{wie in Aufgabe 01}$$

und schreiben

$$\int_{\partial S} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \stackrel{(1)}{=} \int_D (x \mapsto -2x^3) \circ \psi \cdot y^1{}^2 \sin y^2 dy^1 dy^2 dy^3 \stackrel{(y^i) = (r, \vartheta, \varphi)}{=} -2 \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi r^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{4\pi}{9}$$

b) Verwenden hier den Simplex

$$\sigma := (D := [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi), \zeta : D \rightarrow \mathcal{E}, \text{std}) \quad , \quad \zeta(\rho, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} a_1 \rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ a_2 \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ a_3 \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Da  $\text{grad } \varphi = 0$  und  $\Delta\psi = 0$  folgt sofort

$$\int_{\partial S} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \stackrel{(1)}{=} \int_D 0 = 0$$

### Definition: Äquivalente Wege

Zwei Wege  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  nach  $x_1$  heißen *äquivalent*, falls es eine glatte Abbildung  $\zeta : [0, 1]^2 \rightarrow U$ ,  $(t, s) \mapsto \zeta_t(s)$  gibt, so dass:

- $\zeta_0(\cdot) = \gamma_0$
- $\zeta_1(\cdot) = \gamma_1$
- $\zeta_t(0) = x_0$  ,  $\zeta_t(1) = x_1$

**Anschaulich:**  $\gamma_0$  kann glatt in  $\gamma_1$  überführt werden.

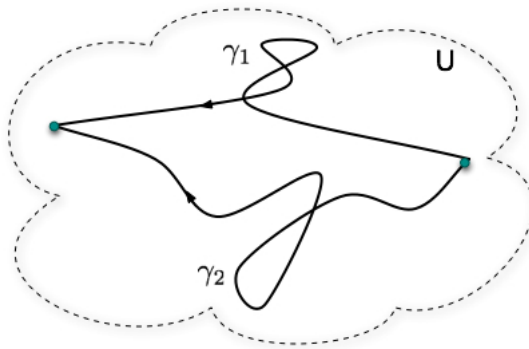


Abbildung 1: Äquivalente Wege

### Aufgabe 03

Es sei vereinbart für skalares Feld  $f \in \mathcal{F}(M)$  auf Mannigfaltigkeit  $(M, \psi, x^i)$ :

$$f(x^1, \dots, x^n) := (f \circ \psi)(x^1, \dots, x^n) = f(x)$$

**Richtung " $\Leftarrow$ "**

Es sei  $f \in \mathcal{F}(M)$  ein 2-mal stetig differenzierbares skalares Feld auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gilt:

$$ddf = d \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \left[ d \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \stackrel{(*)}{=} 0$$

$$(*) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \stackrel{\text{Index Umnennen}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$

**Richtung " $\Rightarrow$ "**

Es sei nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $\omega \in \Lambda^1 \mathbb{R}^n$  eine 1-Form mit der Darstellung

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad \omega_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

und  $d\omega = 0$ , das heißt

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_i \wedge dx^i &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_0 \text{ für } i=j = \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{j < i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{-dx^i \wedge dx^j} \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right] \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{\text{linear unabhängig}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Ist nun  $M$  einfach zusammenhängend, so ist bekanntlich

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

für ein geeignetes  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , das heißt

$$\omega = \omega_i dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = df$$

**Alternativ (konstruktiver Beweis)** ist  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^n \int_0^{x^i} \omega_i(x^1, \dots, x^{i-1}, \xi, 0, \dots, 0) d\xi$$

genau solch ein  $f$ , denn

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = dx^j \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^{x^i} \omega_i(x^1, \dots, x^{i-1}, \xi, 0, \dots, 0) d\xi}_0 \\
&= dx^j \sum_{i>j} \int_0^{x^i} \underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}}_{\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}}(x^1, \dots, x^{i-1}, \xi, 0, \dots, 0) d\xi + \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, x^j, 0, \dots, 0) dx^j \\
&= dx^j \sum_{i>j} \left[ \omega_j(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, 0, \dots, 0) - \omega_j(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \right] + \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, x^j, 0, \dots, 0) dx^j \\
&= dx^j \left[ \omega_j(x^1, \dots, x^n) - \cancel{\omega_j(x^1, \dots, x^j, 0, \dots, 0)} \right] + \cancel{\omega_j(x^1, \dots, x^j, 0, \dots, 0)} dx^j \\
&= \omega_j dx^j = \omega
\end{aligned}$$

□

### Alternative

Es sei  $d\omega = 0$ ,  $\omega \in \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ . Dann setzen wir

$$f(x) := \int_{\substack{\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(0)=x_0 \\ \gamma(1)=x}} \omega$$

**Behauptung:**  $f(x)$  ist wohldefiniert, das heißt wegunabhängig.

**Beweis:** Seien  $\gamma_0, \gamma_1$  Kurven von  $x_0$  nach  $x$ , und

$$\zeta_t(s) := (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$$

<sup>1</sup> Dabei ist  $\zeta$  glatt in

$$\sigma := ([0,1]^2, \zeta : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{std})$$

so dass gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\sigma} d\omega \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\sigma} \omega = \underbrace{\int_{(\{0\} \times [0,1], \zeta|_{\{0\} \times [0,1]}, \downarrow)} \omega}_0 + \underbrace{\int_{(\{1\} \times [0,1], \zeta|_{\{1\} \times [0,1]}, \uparrow)} \omega}_0 + \int_{([0,1] \times \{0\}, \zeta|_{[0,1] \times \{0\}}, \rightarrow)} \omega + \int_{([0,1] \times \{1\}, \zeta|_{[1,1] \times \{0\}}, \leftarrow)} \omega \\
&\quad \text{da } \zeta|_{\{0\} \times [0,1]} \equiv x_0 \quad \text{da } \zeta|_{\{0\} \times [0,1]} \equiv x_0 \\
&= \int_{([0,1] \times \{0\}, \zeta|_{[0,1] \times \{0\}}, \rightarrow)} \omega - \int_{([0,1] \times \{1\}, \zeta|_{[1,1] \times \{0\}}, \rightarrow)} \omega \cong \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega
\end{aligned}$$

**Behauptung:**  $df = \omega$ , das heißt  $df(\xi) = \omega(\xi)$  für Vektor  $\xi \in T_x \mathbb{R}^n$ . Wählen Kurve  $\gamma$  so dass  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$  und  $\dot{\gamma}(1) = \xi$ . Dann ist

$$\int_{([0,1], \gamma, \rightarrow)} \omega = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

<sup>1</sup>Vgl. Definition *äquivalente Wege*. Dies ist eine besondere Eigenschaft des  $\mathbb{R}^n$ , dass zwei Kurven in einander glatt übergeführt werden können!

Betrachten die Funktion

$$\tilde{f}(s) := \int_0^s \omega(\dot{\gamma}(t)) \, dt$$

das heißt  $\tilde{f}(s) = f(\gamma(s))$ . Wegen

$$\tilde{f}' = \frac{df'}{ds} = \omega(\dot{\gamma}(s)) \quad \forall s$$

ist insbesondere

$$\tilde{f}'(1) = \omega(\xi)$$

Doch andererseits gilt

$$\tilde{f}'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(1+h) - \tilde{f}(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h\xi) - f(x)}{h} = df(\xi)$$

□

## Aufgabe 04

### Methode 1

Es sei

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x+iy) = f^r(x,y) + if^c(x,y), \quad f^r, f^c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

holomorph, das heißt 1-mal differenzierbar, und  $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \rightarrow U$  zwei ein Gebiet  $\Omega$  umschließende Wege von  $z_1 \in U$  nach  $z_2 \in U$ . Diese bilden den Rand (umschließen) einer stückweise differenzierbaren zusammenhängenden Menge  $\Omega \subset U$ , so dass gilt

$$\int_{\gamma_1} f \, dz - \int_{\gamma_2} f \, dz = \oint_{\partial\Omega} f \, dz = \oint_{\partial\Omega} (f^r + if^c)(dx + idy) \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{\oint_{\partial\Omega} (f^r dx - f^c dy)}_{\text{reelles } \mathcal{R}\text{-Integral}} + i \int_{\partial\Omega} (f^r dy + f^c dx)$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} - \int_{\Omega} \underbrace{\left( \frac{\partial f^r}{\partial y} + \frac{\partial f^c}{\partial x} \right)}_{\substack{0 \\ \text{nach} \\ \text{Cauchy-Riemann} \\ \text{DGL}}} dx \, dy + i \int_{\Omega} \underbrace{\left( \frac{\partial f^r}{\partial x} - \frac{\partial f^c}{\partial y} \right)}_{\substack{0 \\ \text{nach} \\ \text{Cauchy-Riemann} \\ \text{DGL}}} dx \, dy = 0$$

□

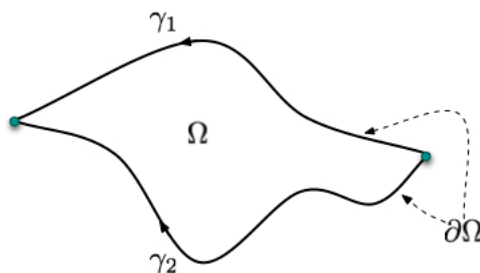


Abbildung 2: Zur Aufgabe 04

### Methode 2 (Verallgemeinerung)

Seien nun  $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  zwei äquivalente Wege, dazu  $\zeta$  wie oben, und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Betrachten wir den 2-Simplex

$$\sigma := ([0,1]^2, \zeta, \text{std})$$

so gilt

$$\int_{\partial\sigma} (f^r dx - f^c dy) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\sigma} \underbrace{\left( \frac{\partial f^r}{\partial y} + \frac{\partial f^c}{\partial x} \right)}_{\substack{0 \\ \text{nach} \\ \text{Cauchy-Riemann}}} dx \wedge dy = 0$$

Andererseits ist

$$\int_{(\{0\} \times [0,1], \zeta|_{\{0\} \times [0,1]}, \downarrow)} (f^r dx - f^c dy) = 0$$

denn  $\zeta|_{\{0\} \times [0,1]} \equiv z_0$  und somit  $\zeta^* \omega(\xi) = \omega(\underbrace{d\zeta}_0(\xi)) = 0$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^2$ . Analog ist auch

$$\int_{(\{0\} \times [0,1], \zeta|_{\{1\} \times [0,1]}, \uparrow)} (f^r dx - f^c dy) = 0$$

Somit ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\sigma} (f^r dx - f^c dy) = \int_{([0,1] \times \{0\}, \zeta|_{[0,1] \times \{1\}}, \rightarrow)} (f^r dx - f^c dy) + \int_{([0,1] \times \{1\}, \zeta|_{[0,1] \times \{1\}}, \leftarrow)} (f^r dx - f^c dy) \\ &= \int_{([0,1] \times \{0\}, \zeta|_{[0,1] \times \{1\}}, \rightarrow)} (f^r dx - f^c dy) - \int_{([0,1] \times \{1\}, \zeta|_{[0,1] \times \{1\}}, \rightarrow)} (f^r dx - f^c dy) \\ &\cong \int_{\gamma_0} (f^r dx - f^c dy) - \int_{\gamma_1} (f^r dx - f^c dy) \end{aligned}$$

□