Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 03

26. November, 2008

Aufgabe 01

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, dS \ , \ \ \mathbf{n} : \text{Normaleneinheitsvektor auf Fläche}$$

wobei

$$\mathbf{F} = (2x^1, {x^2}^2, {x^3}^2)$$

ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ und

$$S^2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \right\}$$

die Einheitskugeloberfläche seien.

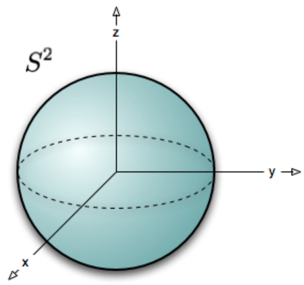

Abbildung 1: Zu Aufgabe 01

Aufgabe 02

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial S} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS$$

wobei:

a) $\varphi = {x^3}^2$, $\psi = {x^1}^2 + {x^2}^2 - {x^3}^2$ und

$$S := \left\{ (x^1, x^2, x^3) \mid \|x\| \leq 1 \ ; \ x^2 \geq 0 \right\}$$

die positive x^2-Halbkugel seien.

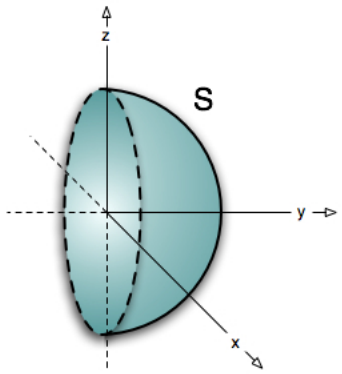

Abbildung 2: Zu Aufgabe 02 (a)

b) $\varphi = 1$ und $\psi = e^{x^1}\sin x^2 + e^{x^2}\sin x^1 + x^3$ und

$$\mathcal{E} := \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \;\middle|\; \frac{{x^1}^2}{a_1^2} + \frac{{x^2}^2}{a_2^2} + \frac{{x^3}^2}{a_3^2} \leq 1 \right\}$$

das durch die Hauptachsen a_i beschriebene Ellipsoid sind.

Aufgabe 03

Beweisen Sie das Poincarésche Lemma (für 1-Formen):
Es sei $\omega \in \Lambda^1\mathbb{R}^n$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = df \qquad \text{für geeignetes} \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Aufgabe 04

Die Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Zeigen Sie:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\; dz$$

hängt nicht von dem Weg von z_0 nach z_1 (in der Klasse der äquivalenten Wege) ab.

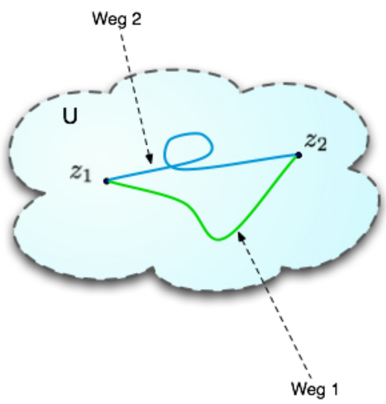

Abbildung 3: Zu Aufgabe 04