Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

19. November 2008

Aufgabe 01

Aufgrund der Natur der zugrundeliegenden Karte $\psi = \mathrm{Id}$ ist für $\xi \in T_x\mathbb{R}^2$:

$$dx^i(\xi) = d(\mathrm{Id}^i)(\xi) = \xi^i$$

und somit

	ω^1	ω^2
ξ_1	1	-1
ξ_2	0	-2
ξ_3	0	-8

Betrachten ω^3 nun mit zwei unterschiedlichen Methoden.
Methode 1: Betrachten wir die Funktion $f(x) := x_1^2 + x_2^2$ definiert auf $\mathbb{R}^2$, so ist ω^3 genau das Differential df, also

$$\omega^3 = df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = 2x_1 dx^1 + 2x_2 dx^2$$

Methode 2: Betrachten wir die Karte $\psi^{-1}(x) = \left(x_1^2 + x_2^2, \arctan \frac{x_2}{x_1}\right) = (y^1, y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$ so ist

$$\omega^3 = dr^2 = dy^1$$

Für Vektor ξ bzgl. Karte Id ist

$$dy^1\xi = d\left(\psi^{-1} \circ \mathrm{Id}\right)^1 \xi \cong (2x_1, 2x_2) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = 2x_1\xi^1 + 2x_2\xi^2$$

das heißt $\omega^3 = 2x_1 dx^1 + 2x_2 dx^2$.

Eingesetzt ergibt schließlich:

	ω^1	ω^2	ω^3
ξ_1	1	-1	1
ξ_2	0	-2	-2
ξ_3	0	-8	0

Aufgabe 02

Die zugrundeliegende Karte in $\mathbb{R}^2$ ist, so dass

$$\omega^1 dx^1 \wedge dx^2(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix} \cong \text{Volumen aufgespannt durch } \xi, \eta$$

Außerdem ist

$$\omega^2 = x_1 dx^1 \wedge dx^2 - x_2 dx^2 \wedge dx^1 = (x_1 + x_2) \underbrace{dx^1 \wedge dx^2}_{\omega^1}$$

Behandeln nun ω^3 mit zwei unterschiedlichen Methoden:
Methode 1: Schreiben

$$f^* \left(r dr \wedge d\varphi \right)(x) = \left(r f^* dr \wedge f^* d\varphi \right)(x) = r(f(x)) \cdot \Big[d(r \circ f) \wedge (\varphi \circ f) \Big](x)$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \left[\frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_2} dx^2 \right] \wedge \left[\frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_2} dx^2 \right]$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \left[\frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \arctan \frac{x_2}{x_1}}{\partial x_1} \right] dx^1 \wedge dx^2$$

$$= dx^1 \wedge dx^2 = \omega^1$$

Methode 2: Wegen $N \cong M$ können wir $f : (M, \mathrm{Id}) \to (M, \psi)$ auffassen. Dann ist wegen

$$(\psi^{-1} \circ f)(x) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ \arctan \frac{y}{x} \right) \overset{\text{bekanntlich}}{=} (r(x), \varphi(x)) = \psi^{-1}(x)$$

genau $f = \mathrm{Id}$, das heißt

$$\omega^3 = \mathrm{Id}^*(r dr \wedge d\varphi) = r \cdot \mathrm{Id}^*\, dr \wedge \mathrm{Id}^*\, d\varphi = r \cdot \left[\frac{\partial r}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} dx^2 \right] \wedge \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx^2 \right] \overset{\text{analog}}{=} dx^1 \wedge dx^2$$

Somit ergibt sich

	ω^1	ω^2	ω^3
(ξ_1, η_1)	-1	1	-1
(ξ_2, η_2)	-2	-1	3
(ξ_3, η_3)	-1	1	-1