Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

5. November 2008

Aufgabe 01

a) g (bzw. g^{-1}) sind Maßerhaltend, und es gilt $\lambda(\Omega) = 2\pi < \infty$. Es sei nun $x \in \Omega$ und $\delta > 0$. Dann existiert nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré, ein $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\left(g^{-1}\right)^m(x) \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$, das heißt

$$x_0 \in B_{\frac{\delta}{2}}(g^{-m}(x)) \overset{\substack{g \\ \text{erhält} \\ \text{Abstände}}}{\Longrightarrow} g^m(x_0) \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x) \overset{\Delta-\text{Ungleichung}}{\subset} B_\delta(x_0)$$

b) Es sei $x_0 \in \Omega$ beliebig. Betrachten den Abschluss

$$M := \overline{\{g(x_0)\}}$$

Dabei ist M g-invariant, denn

$$g^{n_k}(x_0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \Leftrightarrow \quad g^{n_k+1}(x_0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$$

das heißt $g(M) = M$.
Annahme: $M \neq \Omega$, das heißt $U := \underbrace{\Omega \setminus M}_{\text{offen}} \neq \emptyset$ ist eine offene, nicht-leere Menge (und somit keine Nullmenge). Dann ist U ebenfalls g-invariant, denn

$$g(U) = g(\Omega \setminus M) \overset{g \text{ bijektiv}}{=} \underbrace{g(\Omega)}_{\Omega} \setminus \underbrace{g(M)}_{M} = \Omega \setminus M = U$$

Für einen festen Punkt $x_1 \in U$ betrachten wir das (nicht-leere) offene Intervall

$$I := \bigcup_{\substack{I_i \subset U \\ I_i \text{ offenes Intervall} \\ x_1 \in I}} I_i$$

der Länge l und den dazu gehörigen Mittelpunkt x_c. Nach dem Wiederkehrsatz gilt dann

$$\exists\, m \in \mathbb{N} : g^m(x_c) \in B_{l/2}(x_c)$$

Wäre $|g^m(x_c) - x_c| =: \delta > 0$ so wäre das komplette Intervall I auch um $\delta < \frac{l}{2}$ verschoben, so dass

$$g^m(I) \cap M \neq \emptyset \;\Rightarrow\; g^m(I) \not\subseteq U \quad : \text{ Widerspruch}$$

wäre. Es muss also $g^m(x_c) = x_c$ sein, was jedoch $\frac{m\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ impliziert, was ein Widerspruch ist.

Variante: Es sei $x_0 \in \Omega$ und $x \in \Omega, \varepsilon > 0$ beliebig. Sei

$$B := B^o_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0) \setminus \{x_0\} : \text{offen}$$

Dann existiert ein $x' \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$g^m(x') \subset B \;\Rightarrow\; x_0 \in B^o_{\frac{\varepsilon}{4}}(g^m(x')) \overset{|x'-x_0|<\frac{\varepsilon}{4}}{\subset} B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(g^m(x_0))$$

Wegen $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ ist $\forall\, m \in \mathbb{Z} : g^m(x_0) \neq x_0$, das heißt

$$0 < \underbrace{|g^m(x_0) - x_0|}_{=:\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Die Abbildung $g^m : \Omega \to \Omega$ dreht also alle Punkte um das Bogenmaß $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $g^{mk}(x_0) = (g^m)^k(x_0) \subset B^o_\varepsilon(x)$.

$\square$

Aufgabe 02

Beginnend mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi) = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$$

Eine gerade Kurve $(x,y)(t)$ zwischen zwei Punkten $p(t_1), p(t_2)$ ist genau die Verbindungsstrecke für die das Funktional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)}_{\mathcal{L}(\rho,\varphi,\dot{\rho},\dot{\varphi},t)}\, dt$$

extremal wird (vgl. kürzeste Verbindungsstrecke). Da nur eine DGL gesucht ist, machen wir den Ansatz $\dot{\varphi} = 1$, das heißt es ist

$$\mathcal{L} = \dot{\rho}^2 + \rho^2$$

Obere Bedingung entspricht dann der Euler-Lagrange Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 2\left[\frac{d}{dt}\dot{\rho} - \rho\right] = 2\ddot{\rho} - 2\rho$$

bzw.

$$\boxed{\ddot{\rho} = \rho}$$

Aufgabe 03

Es sei o.B.d.A $\alpha_1 \neq 0$. Wäre dies der Fall, dann ist Q_{q_0} für jedes q_0 geschlossen und nicht dicht in T.

a) **Behauptung:** Q_{q_0} ist dicht in $T \Leftrightarrow g(q_0) : \mathbb{R} \to T$ beschreibt eine geschlossene Kurve $\Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{Q}$.
Beweis: Es sei $q_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2)$ beliebig gewählt.

  i) Zeigen: $g(q_0)$ ist eine geschlossene Kurve $\Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{Q}$.
  Es sei $g(q_0)$ geschlossen, das heißt $\exists\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$g^t(q_0) = q_0 \;\Leftrightarrow\; \varphi^1(t) - \varphi_0^1 = \alpha_1 t = n \cdot 2\pi \;\wedge\; \varphi^2(t) - \varphi_0^2 = \alpha_2 t = m \cdot 2\pi\;,\; n, m \in \mathbb{N}$$

  Dann ist

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 t} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Umgekehrt, ist $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, so ist

$$\alpha_2 \cdot \underbrace{\frac{n}{\alpha_1}}_{t} 2\pi = m \cdot 2\pi \;,\; \alpha_1 \cdot \frac{n}{\alpha_1} 2\pi = n \cdot 2\pi$$

ii) Zeigen: $g(q_0)$ ist eine geschlossene Kurve $\Rightarrow Q_{q_0}$ ist nicht dicht in T.
Es sei $g(q_0)$ geschlossen, das heißt $g(q_0)$ ist P-periodisch für ein positives $P \in \mathbb{R}$ bzw. Q_{q_0} hat eine endliche *Länge* (auf dem Torus bzw. in $[0, 2\pi)^2$) und ist somit natürlich nicht dicht in $[0, 2\pi)^2$.

iii) Zeigen: Ist $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \notin \mathbb{Q}$, so ist Q_{q_0} dicht in T.
Es sei $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \notin \mathbb{Q}$. Für beliebiges $\varphi_1^2 := \varphi^2(t_1) \in [0, 2\pi)$ betrachten wir den φ_1^2-Kreisring

$$K_{\varphi_1^2} := \{\varphi^1, \varphi^2) : \varphi^2 = \varphi_1^2\}$$

wobei

$$K_{\varphi_1} \cap Q_{q_0} = \{g^t(q_0) : \varphi^2(t) = \varphi_1^2\} = \left\{g^t(q_0) : t = t_1 + \frac{2\pi}{\alpha_2} \cdot n \;,\; n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\left(\varphi_1^1 + \frac{2\pi}{\alpha_2}\alpha_1 \cdot n, \; \varphi_1^2\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Dann erfüllt die Abbildung

$$f(\varphi) := \varphi + \underbrace{\frac{2\pi}{\alpha_2} \cdot \alpha_1}_{\Delta\varphi} \;,\; \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$$

genau die Bedingungen wie in Aufgabe (01), das heißt

$$\underbrace{\{(f^n(\varphi_1^1), \varphi_1^2)\}_{n \in \mathbb{Z}}}_{K_{\varphi_1^2} \cap Q}$$

ist dicht in $K_{\varphi_1^2}$. Da $\alpha_2 \neq 0$, existiert für jedes φ_1^2 ein t_1 mit $\varphi_1^2 = \varphi^2(t_1)$, das heißt $Q_{q_0} \cap K_{\varphi_1^2}$ ist dicht in $K_{\varphi_1^2}$ für jedes φ_1^2. Für beliebigen Punkt $\underbrace{(\varphi_1^1, \varphi_1^2)}_{\in K_{\varphi_1^2}}$ und $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$g^t(q_0) = (\varphi^1(t), \underbrace{\varphi^2(t)}_{\varphi_1^2}) \in B_\varepsilon^o(\varphi_1^1, \varphi_1^2))$$

$\square$

b) Zu zeigen wäre: $Q_{q_0,\delta}$ besitzt keine isolierten Punkte.
Sei also $x := g^{n\delta}(q_0) \in Q_{q_0,\delta}, \; n \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $g^\delta(\cdot)$ Maßerhaltend (sogar bijektiv) und T ein endlicher Maßraum ist, existiert ein $q_1 \in B^o_{\varepsilon/2}(x)$ und $m \neq n$ mit

$$\underbrace{\left(g^\delta\right)^{(n-m)}(q_1)}_{g^{(n-m)\delta}(q_1)} \in B^o_{\varepsilon/2}(x) \;\Rightarrow\; x \in B^o_{\varepsilon/2}\left(g^{(n-m)\delta}(q_1)\right)$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{g^{(m-n)\delta}(x)}_{g^{m\delta}(q_0)} \in g^{(m-n)\delta}\left[B^o_{\varepsilon/2}\left(g^{(n-m)\delta}(q_1)\right)\right] = B_{\varepsilon/2}(q_1) \overset{\triangle}{\subset} B_\varepsilon(x)$$

Da $g(q_0)$ nicht geschlossen ist, ist auch

$$y := g^{m\delta}(q_0) \overset{\substack{m\neq n\\ \delta\neq 0}}{\neq} g^{n\delta}(q_0) = x \qquad \text{wobei} \qquad y \in B_\varepsilon^o(x)$$

Wegen $y \in Q_{q_0,\delta}$ ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe 04

Definieren

$$R(U) := \lim_{N\to\infty} \frac{F_U(N)}{N}$$

- Für Punktmengen, das heißt $U = \{p\} \subset S_1$, ist offensichtlich $R(U) = 0 = \mathrm{Vol}(U)$, da per Konstruktion $g^n(0) = p$ für höchstens ein $n \in \mathbb{N}$ sein darf. Somit können wir insbesondere im folgenden o.B.d.A annehmen dass es sich bei den Intervallen stets um offene Intervalle handelt.

- Es seien zunächst U_1, U_2 zwei offene Intervalle, so dass $U_2 = g(U_1)$. Dann gilt:

  $$n \in M_{U_1}(N) \;\Leftrightarrow\; n+1 \in M_{U_2}(N+1) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

  das heißt

  $$F_{U_2}(N+1) - 1 \le F_{U_1}(N) \le F_{U_2}(N+1)$$

  und somit

  $$R(U_2) = \lim_{N+1\to\infty} \frac{F_{U_2}(N+1)-1}{N+1} \le \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{F_{U_1}(N)}{N}}_{R(U_1)} = \lim_{N+1\to\infty} \frac{F_{U_2}(N+1)}{N+1} = R(U_2) \tag{1}$$

- Für festes φ_0 sei die Funktion

  $$f(t) := R([\varphi_0, \varphi_0 + t)) \;,\; t \in [0, 2\pi]$$

  definiert. Dann ist f stetig.
  Beweis: Behandeln o.B.d.A nur den Fall der rechts-Stetigkeit, für $\varphi_0 = 0$. Für $t \ge 0$ ist f offensichtlich monoton wachsend, das heißt jede Unstetigkeitsstelle x ist sogar eine (positive, $\varepsilon > 0$) Sprungstelle. Wegen (1) bedeutet diese ε-Sprungstelle sogar eine ε-Sprungstelle an $g^k(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Doch per Konstruktion von g sind diese Punkte alle Verschieden, das heißt f hätte unendlich viele ε-Sprungstellen auf S_1, was der Endlichkeit von f widerspricht.

- Seien nun U_1, U_2 beliebige (o.B.d.A offene, nichtleere) Intervalle, jeweils eingeschlossen durch die Winkel $\varphi_1^1 < \varphi_1^2$ und $\varphi_2^1 < \varphi_2^2$. Dabei sei $\mathrm{Vol}(U_1) = \mathrm{Vol}(U_2)$, das heißt für ein geeignetes φ_0 ist $U_2 = U_1 + \varphi_0$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert nach Aufgabe 01 ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

  $$g^k(\varphi_1^1) \in B_\varepsilon^o(\varphi_2^1)$$

  bzw. ein $|\delta_\varepsilon| < \varepsilon$ mit

  $$g^k(U_1) = U_2 + \delta$$

  Dabei gilt

  $$R(U_1) \overset{(1)}{=} R(g^k(U_1)) = R(U_2 + \delta) \underset{\text{o.B.d.A } \delta_\varepsilon \ge 0}{\overset{\substack{\text{Additivität}\\ \text{von } R}}{=}} R(U_2) + R([\varphi_2^2, \varphi_2^2 + \delta_\varepsilon)) - R((\varphi_2^1, \varphi_2^1 + \delta_\varepsilon])$$

  Durch $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ erhalten wir eine Folge $\delta_{\varepsilon_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wegen der Stetigkeit von $R([\varphi_2^2, \varphi_2^2 + \delta))$ bzgl. δ ist dann auch

  $$R(U_1) = \lim_{n\to\infty} R(U_1) = R(U_2) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left\{ R([\varphi_2^2, \varphi_2^2 + \delta_{\varepsilon_n})) - R((\varphi_2^1, \varphi_2^1 + \delta_{\varepsilon_n}]) \right\}}_{0} = R(U_2) \tag{2}$$

- Sei nun $U \subset S_1$ ein Intervall mit Bogenlänge $\mathrm{Vol}(U) = q \cdot \mathrm{Vol}(S_1)$ wobei $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Durch Teilen von U in m gleich-große Teilintervalle U_i der Länge $\mathrm{Vol}(U_i) = \dfrac{\mathrm{Vol}(U)}{m} = \dfrac{\mathrm{Vol}(S_1)}{n}$ wird wegen der Translationsinvarianz von R (vgl. 2) ersichtlich:

  $$R(S_1) = n \cdot R(U_i) = \frac{n}{m} \cdot R(U) \;\Rightarrow\; R(U) = q \cdot \underbrace{R(S_1)}_{1} \;\Rightarrow\; R(S_1) = \frac{\mathrm{Vol}(U)}{\mathrm{Vol}(S_1)}$$

- Aufgrund der Stetigkeit von f und der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $[0, 2\pi]$ gilt die Aussage auch für beliebige Intervalllängen.

Bemerke: Es ist klar dass sich die Aussage verallgemeinern lässt auf Kreisringe mit beliebigem Radius R. In dem Fall ist dann einfach

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_N(U)}{N} = \frac{\mathrm{Vol}(U)}{R \cdot \mathrm{Vol}(S_1)}$$

□

Hilfsaussage 01

Für Zahl $a \in (0,\infty)$ bezeichne $[a]_b^1 \in \{1,..,b-1\}$ die 1. Ziffer von a im b-adischen System, $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$[a]_b^1 = \left\lfloor b^{\{\log_b a\}} \right\rfloor$$

wobei $\lceil \cdot \rceil$ und $\{\cdot\}$ jeweils den ganzen Anteil und den Bruchteil einer Zahl angeben.

Beweis: Es sei $a \in (0,\infty)$ beliebig. Dazu sei $n_a \in \mathbb{Z}$ so dass

$$b^{n_a} \leq a < b^{n_a+1}$$

Dann gilt

$$\left\lfloor b^{\{\log_b a\}} \right\rfloor = \left\lfloor b^{\left\{\log_b \left[b^{n_a} \cdot \frac{a}{b^{n_a}}\right]\right\}} \right\rfloor = \left\lfloor b^{\left\{ \overbrace{\log_b b^{n_a}}^{n_a \in \mathbb{N}_0} + \overbrace{\log_b \frac{a}{b^{n_a}}}^{\in(0,1)} \right\}} \right\rfloor = \left\lfloor b^{\log_b \frac{a}{b^{n_a}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b^{n_a}} \right\rfloor \overset{\text{def}}{=} [a]_b^1$$

$\square$

Aufgabe 05

Es sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $k \in (0,\infty)$ so dass $\log_b k \notin \mathbb{Q}$. Betrachten den Kreisring mit Umfang 1 und die Folge $[k^n]_b^1$. Wegen

$$\log_b k^{n+1} - \log_b k^n = \log_b k$$

erzeugt die Abbildung

$$g^n := g(n) := 2\pi \cdot \{\log_b k^n\} = \log_b k^n \mod 2\pi \in S_1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Folge von Punkten $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Einheitskreis, wobei sich jeder vom vorigen um den Winkel

$$\alpha := 2\pi \cdot \log_b k = \left|g^{n+1} - g^n\right|$$

unterscheidet.

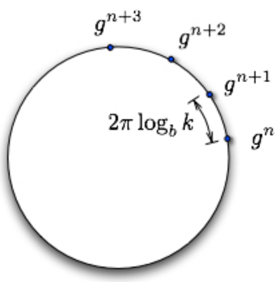

Abbildung 1: Zu Aufgabe 05

Dabei ist nach Hilfsaussage 01 genau dann $[k^n]_b^1 = d,\ d \in \{1,..,b-1\}$ wenn

$$\{\log_b k^n\} \in [\log_b d, \log_b(d+1))$$

das heißt

$$[k^n]_b^1 = d \;\Leftrightarrow\; g^n \in [2\pi \log_b d, 2\pi \log_b(d+1))$$

Nach Aufgabe 04 ist wegen $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ die *relative Häufigkeit* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\#d}{n}$ von $d \in \{1,..,b-1\}$ in der Folge $[k^n]_b^1$ gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#d}{n} = \frac{\text{Vol}\left[2\pi \log_b d, 2\pi \log_b(d+1)\right)}{\text{Vol}(S_1)} = \log_b(d+1) - \log_b d = \log_b \frac{d+1}{d}$$

bzw. für Ziffern $d_1, d_2 \in \{1, ..., b-1\}$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\#d_1}{\#d_2} = \frac{\log_b \frac{d_1+1}{d_1}}{\log_b \frac{d_2+1}{d_2}}} \tag{3}$$

Bemerke: Die relative Häufigkeit von d steigt streng monoton mit $\dfrac{d+1}{d}$. Somit ist prinzipiel $d=1$ die am Häufigsten auftauchende erste Ziffer (unabhängig von k und b), mit einem Anteil

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\#1}{n} = \log_b 2} \tag{4}$$

Speziell:

Für $k=2$ und $b=10$ (dekadisches System) ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#7}{\#8} = \frac{\log_{10} \frac{8}{7}}{\log_{10} \frac{9}{8}} \approx 1.1337$$

Dabei ist

$$2^{46} = 70368744177664$$

die kleinste Potenz von 2 mit erster Ziffer 7.