Mathematische Methoden der klassischen Mechanik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 01

28. Oktober, 2008

Aufgabe 01

Betrachten den Kreisring

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1 \right\}$$

und die darauf definierte Funktion $g : \Omega \to \Omega$, die jeden Punkt $x \in \Omega$ um den Winkel α rotieren lässt. Ω sei identifiziert mit dem Intervall $[0, 2\pi)$ (und dem dort zugrundelegenden Lebesque-Maß) und es gelte $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.

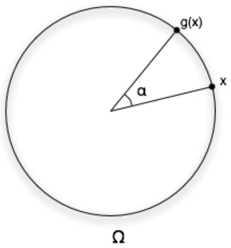

Abbildung 1: Zu Aufgabe 01

Zu zeigen ist:

a) $\forall\, \delta > 0 : \forall\, x \in \Omega : \exists m \in \mathbb{N} : |g^m x - x| < \delta$

b) $\forall\, x_0 \in \Omega : \left\{ g^k(x_0) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist dicht in Ω

Aufgabe 02

Geben Sie eine GDGL in Polarkoordinaten an, deren Lösungen Geraden sind. Benutzen Sie dafür die Euler-Lagrange Gleichungen.

Aufgabe 03

Es sei T eine Torusfläche, deren Punkte beschrieben seien durch die Standard-Winkelkoordinaten

$$q = (\varphi^1, \varphi^2)$$

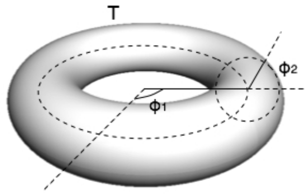

Abbildung 2: Zu Aufgabe 02

Die auf T geltende Metrik sei gegeben durch

$$d(q_1, q_2) = \sqrt{(\varphi_1^1 - \varphi_1^2)^2 + (\varphi_2^1 - \varphi_2^2)^2}\ ,\ \varphi_j^i \in [0, 2\pi)$$

Es sei nun $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der zur DGL

$$\frac{d}{dt}\varphi^1 = \alpha_1\ ,\ \frac{d}{dt}\varphi^2 = \alpha_2$$

gehörende Fluss.

a) Unter welchen Umständen ist

$$Q_{q_0} := \{g^t(q_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

dicht in T?

b) Zeigen Sie, unter oberen Voraussetzungen, dass für jedes $\delta \neq 0$ und q_0 die Menge

$$Q_{q_0,\delta} := \left\{g^{n\delta}(q_0)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

in sich dicht ist.

Aufgabe 04

Betrachten den Einheitskreis S_1 mit der darauf definierten Abbildung

$$g(\varphi) = \varphi + \alpha\ ,\ \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$$

bzgl. des Winkels φ (vgl. Aufgabe 01). Für eine beliebige Untermenge $U \subset S_1$ sei definiert

$$F_U(N) := \#\underbrace{\{0 \leq n < N : g^n(0) \in U\}}_{G_U(N)}$$

Zeigen Sie: Für ein Intervall $U \subset S_1$ ist

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_U(N)}{N} = \frac{\mathrm{Vol}(U)}{\mathrm{Vol}(S_1)}$$

Bemerkung: Die Aussage gilt sogar für beliebige messbare Menge $U \subset S_1$.

Aufgabe 05

Man betrachte die Folge $\left([k^n]_b^1\right)_n$ der ersten Ziffern $[k^n]_b^1$ der Folgenglieder von k^n, für eine Zahl $k \in (0, \infty)$ im b-adischen System, $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zum Beispiel wäre für $k = 2$ im dekadischen System

$$[2^n]_{10}^1 = 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, ..$$

Berechnen Sie die relative Häufigkeit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#d}{n}$$

mit der eine Ziffer $d \in \{1, .., b-1\}$ in der Folge auftritt. Spezifizieren Sie weiter Ihr Ergebnis für den Fall $k = 2$ und $b = 10$ und beantworten Sie die Fragen:

- Ist 7 in der Folge?
- Was ist

  $$\lim_{n \to \infty} \frac{\#7}{\#8}$$

  ?